

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J.
BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY,
WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN,
CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN

IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN

IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN.

81. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1920

Inhalt des einundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

| | Seite |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Beck, H. , in Bonn. Über lineare Somenmannigfaltigkeiten | 187 |
| Bernstein, F. , in Göttingen. Bemerkung zu der Abhandlung: Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs von H. Hamburger in Berlin (Dieser Band, S. 31) | 46 |
| Bögel, K. , in Köslin. Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen | 64 |
| van der Corput, J. G. , in Utrecht. Über Gitterpunkte in der Ebene | 1 |
| Hamburger, H. , in Berlin. Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs | 31 |
| Hamburger, H. , in Berlin. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems (Teil I) | 235 |
| Hertz, P. , in Göttingen. Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung | 219 |
| Kritikos, N. , in Konstantinopel. Über ganze transzendente Funktionen mit reellen Nullstellen | 97 |
| Nielsen, J. , in Hamburg. Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen | 94 |
| Noether, E. , in Göttingen. Zur Reihenentwicklung in der Formentheorie. (Zusatz und Berichtigung zu Nr. III der Arbeit „Über ganze rationale Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen“, Math. Ann. 77, S. 93) | 25 |
| Ostrowski, A. , in Göttingen. Über die Existenz einer endlichen Basis bei Systemen von Potenzprodukten | 21 |
| Rademacher, H. , in Berlin. Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen. II | 52 |
| Schmeidler, W. , in Göttingen. Über die Singularitäten algebraischer Gebilde | 223 |
| Sternberg, W. , in Heidelberg. Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen | 119 |
| Wolff, J. , in Groningen. Über Folgen analytischer Funktionen | 48 |
| Preisauflage der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1921 | 320 |



Über Gitterpunkte in der Ebene.

Von

J. G. van der Corput in Utrecht.

Wenn man die elementaren Gitterpunktabzählungen außer Betracht läßt, so waren bis vor kurzem von nur wenigen ebenen Bereichen Gitterpunktabzählungen bekannt, und zwar:

1. beim Bereiche $uv \leq x$, $u \geq 1$ und $v \geq 1$ durch Voronoï¹⁾ 1903 mit einem Fehler der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x} \log x)$, mittels einer eigenen ganz im Gebiete der reellen Analysis verlaufenden Methode;
2. beim Kreise $u^2 + v^2 \leq x$ durch Herrn Sierpiński²⁾ 1906 mit der Fehlerabschätzung $O(\sqrt[3]{x})$, mittels der Voronoischen Methode;
3. durch Herrn Landau³⁾ 1912 und 1915 mittels einer eigenen kom-

¹⁾ G. Voronoï, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 126 (1903), S. 241–282.

²⁾ W. Sierpiński, O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych, Prace matematyczno-fizyczne, 17 (1906), S. 77–118. (S. 115–118: Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques (résumé)).

³⁾ E. Landau. a) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse.

Erste Abhandlung, Jahrgang 1912, S. 687–771.

Zweite Abhandlung, Jahrgang 1915, S. 209–243.

Dritte Abhandlung, Jahrgang 1917, S. 96–101.

b) Über einen Satz des Herrn Sierpiński, Giornale di Matematiche di Battaglini, 51 (1913), S. 73–81.

c) Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse, (1915), S. 458–476.

d) Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 124, Abt. IIa (1915), S. 445–468.

plex-funktionentheoretischen Methode, bei dem in 1. erwähnten Bereiche mit dem Restgliede $O(\sqrt[3]{x} \log x)$ und bei der Ellipse

$$(1) \quad au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f \leq x$$

mit dem Restgliede $O(\sqrt{x})$; Herr Landau hat auch mehrdimensionale Gitter mit beliebigem Ausgangspunkte und beliebigen Weiten betrachtet, doch bleiben solche in dieser Abhandlung außer Betracht;

4. durch Herrn Landau⁴⁾ 1912 und 1915 bei den in 1. und 3. genannten Bereichen mit denselben Restgliedern mittels einer ganz im Gebiete der reellen Analysis verlaufenden Methode, welche ihrem Grundgedanken nach von Pfeiffer⁵⁾ herrührt, aber von Herrn Landau nach genauer Begründung für die Zahlentheorie in weitestgehender Weise nutzbar gemacht worden ist;

5. bei dem im Klassenzahlproblem auftretenden Bereiche

$$u \geq \mu, \quad v \geq \mu, \quad uv \leq \frac{\mu^2}{4} + x$$

für $1 \leq \mu \leq 2\sqrt{\frac{x}{3}}$ durch Herrn Landau⁶⁾ 1912 mittels der Pfeifferschen

e) Über Dirichlets Teilerproblem, Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse, (1915), S. 317–328.

f) Über die Heekesche Funktionalgleichung, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, (1917), S. 102–111.

g) Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale (Leipzig und Berlin (Teubner) 1918) (143 S.), S. 181.

h) Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Mathematische Zeitschrift, 2 (1918) (S. 52–154), S. 53 und 153.

⁴⁾ E. Landau. a) Die Bedeutung der Pfeifferschen Methode für die analytische Zahlentheorie, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 121, Abt. IIa (1912), S. 2195–2332.

b) Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, Annali di Matematica pura ed applicata, III, 20 (1913), S. 1–28.

c) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse.

Erste Mitteilung, Jahrgang 1915, S. 148–160;

Zweite Mitteilung, Jahrgang 1915, S. 161–171.

d) Neue Untersuchungen über die Pfeiffersche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktzahlen, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 124, Abt. IIa (1915), S. 469–505.

⁵⁾ E. Pfeiffer, Über die Periodizität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten, Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungsanstalt zu Jena über das Schuljahr von Ostern 1885 bis Ostern 1886, (1886), S. 1–21.

⁶⁾ E. Landau, Fußnote ⁴⁾ a) l. c., S. 2198–2202; 2246–2288; S. 2252.

Methode mit einem Fehler, der, und zwar gleichmäßig in μ , von der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x} \log x)$ ist;

6. beim Gebiete $|u|^n + |v|^n \leq x$ für $n \geq 2$ durch Cauer⁷⁾ 1914 mit der Fehlerabschätzung $O\left(x^{\frac{n(n-1)}{n(n-1)-1}}\right)$ mittels der Pfeifferschen Methode;

7. beim Bereiche

$$a_0 |u|^n + a_1 |u|^{n-1} |v| + \dots + a_n |v|^n \leq x,$$

wobei die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n verschiedenen Bedingungen genügen, durch Cauer⁸⁾ 1914 mit dem Restgliede $O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$, wiederum mittels der Pfeifferschen Methode;

8. bei dem Hyperbelsektor $0 \leq v < \frac{p}{q} u$ und $\alpha u^2 - \beta uv + \gamma v^2 \leq x$ (α, β, γ, p und q sind positive ganze Zahlen) durch Herrn Hammerstein⁹⁾ 1919 mit einem Fehler der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x})$, ebenfalls mittels der Pfeifferschen Abschätzungsmethode.

In meiner Dissertation¹⁰⁾ habe ich die Voronoische¹¹⁾ und die Pfeiffersche Methode vereinfacht und angewandt auf eine Klasse von Bereichen, welche die sechs oben erwähnten Bereiche enthält; diese Bereiche werde ich Voronoi-Pfeiffersche Bereiche¹²⁾ nennen und auf folgende Weise definieren: Ein VP.-Bereich ist eine im Endlichen gelegene Punktmenge, welche begrenzt wird von einer aus n Strecken λ_ν ($n \geq 0$; $\nu = 1, 2, \dots, n$) und m konvexen¹³⁾ Jordanbögen σ_μ ($m \geq 0$; $\mu = 1, 2, \dots, m$) zusammen-

⁷⁾ D. Cauer, Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Inauguraldissertation, 55 S., Göttingen (W. Fr. Kaestner) 1914.

⁸⁾ D. Cauer, Über die Pfeiffersche Methode, Mathematische Abhandlungen, Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet, Berlin (Julius Springer) 1914, S. 432–447.

⁹⁾ A. Hammerstein, Zwei Beiträge zur Zahlentheorie, Inauguraldissertation, 76 S.; S. 3–59, Göttingen (W. Fr. Kaestner) 1919.

¹⁰⁾ J. G. van der Corput. a) Over roosterpunten in het platte vlak (De beteekenissen van de methoden van Voronoi en Pfeiffer), 128 S., Leiden (P. Noordhoff, Groningen) 1919.

b) In der Abhandlung: Over definitie kwadratische vormen, Nieuw Archief voor Wiskunde, 13, (1919) S. 125–140 wird die Pfeiffersche Methode auf ein beliebiges mehrdimensionales Ellipsoid angewandt.

¹¹⁾ Hiermit ist das von Herrn Landau [Fußnote ⁴⁾ a) l. c., S. 2205] ausgesprochene Desideratum erfüllt: „Natürlich würde ich mich sehr freuen, wenn von anderer Seite auch die Anwendbarkeit der Voronoischen Methode auf meine oder andere Probleme untersucht würde.“

¹²⁾ Abgekürzt: VP.-Bereiche.

¹³⁾ Ein Jordanbogen (d. h. das umkehrbar eindeutig stetige Bild einer Strecke) heiße konvex, falls er mit jeder Geraden höchstens zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat.

gesetzten einfachen geschlossenen Kurve, wobei die nachstehenden Bedingungen A und B erfüllt sind:

A. Jede Strecke λ , sei entweder senkrecht zur u -Achse oder bilde mit dieser einen Winkel von rationaler Tangente. Die Gleichung $a_u u + b_v v = c$, der Strecke λ , werde dann, was eindeutig möglich ist, so geschrieben, daß die Koeffizienten a_u und b_v ganzzahlig und teilerfremd¹⁴⁾ sind, und daß $a_u u + b_v v < c$ ist für alle Innenpunkte des Bereiches in der Nähe eines beliebigen Innenpunktes der Strecke λ .

B. Jeder Jordanbogen σ_μ habe einen gegebenen Richtungssinn und in jedem Punkte P eine, jedoch nicht mehr als eine Tangente (d. h., daß in jedem Punkte P des Jordanbogens, mit Ausschluß seiner Endpunkte, die vordere und hintere Tangente zusammenfallen), wobei der Winkel τ , den diese Tangente mit der positiven u -Achse bildet, sich monoton und stetig ändert, wenn P sich monoton und stetig über σ_μ bewegt, und die Koordinaten von P seien eindeutige differentiiierbare¹⁵⁾ Funktionen $u(\tau)$ und $v(\tau)$ von τ (in dem von τ durchlaufenen Intervall) mit stetigen Derivierten $\frac{du(\tau)}{d\tau}$ und $\frac{dv(\tau)}{d\tau}$; infolgedessen besitzt der Bogen σ eine Länge s , die wir positiv rechnen im Sinne von σ , negativ im entgegengesetzten.

In der Voraussetzung B ist τ nur modulo 2π bestimmt, weil negative Werte und Werte $\geq 2\pi$ nicht ausgeschlossen sind; aus der Konvexität von σ_μ geht aber hervor, daß die Länge des von τ durchlaufenen Intervalls $\leq 2\pi$ ist. Der Punkt P durchlaufe nun den konvexen Jordanbogen σ_μ stetig und monoton. Die monotone und stetige Veränderliche τ ist dann bei dem gegebenen Richtungssinne der Kurve in allen Punkten von σ_μ bestimmt, sobald sie in einem Punkte gegeben ist, so daß es genügt, den Wert von τ in einem Punkte von σ_μ , z. B. in einem der Endpunkte, festzulegen. Weil die Koordinaten von P eindeutige Funktionen von τ sein sollen, ist streckenweises Konstantbleiben von τ ausgeschlossen; τ nimmt also bei der Bewegung von P beständig zu oder beständig ab.

Es sei jetzt in jedem Punkte P von σ_μ der Krümmungsradius $\varrho(\tau)$ definiert durch $\frac{ds}{d\tau}$; wegen Voraussetzung B und

$$u'(\tau) = \varrho(\tau) \cos \tau, \quad v'(\tau) = \varrho(\tau) \sin \tau$$

ist $\varrho(\tau)$ eine stetige Funktion von τ in dem von τ durchlaufenen Intervall.

In meiner Dissertation beweise ich einen sehr allgemeinen Satz über VP.-Bereiche, sowohl mit der Voronoischen als mit der Pfeifferschen Methode, und leite dann aus diesem Satze alle bisher bekannten und viele

¹⁴⁾ Hierbei heiße 0 teilerfremd zu 1 und -1 , aber nicht teilerfremd zu irgend-einer anderen ganzen Zahl.

¹⁵⁾ In den Endpunkten nur einseitig.

neue Gitterpunktabschätzungen ebener Bereiche ab. Auf Rat des Herrn Landau gebe ich hier den Beweis dieses Satzes nach der Voronoischen Methode, weil diese Methode bisher nur auf die unter 1. und 2. genannten Gebiete angewandt wurde; um diesen Beweis zu verstehen, braucht der Leser jedoch weder die Voronoische Methode noch meine Dissertation zu kennen. Weil der Formulierung des Satzes einige Definitionen vorangehen müssen, nenne ich hier vorläufig schon ein einfaches Korollar, das zwar viel weniger tief liegt, aber trotzdem die in 2., 7. und 8. erwähnten Ergebnisse und auch die in 3. genannte Gitterpunktabschätzung der Ellipse (1) als Spezialfälle enthält, nämlich:

Es sei G ein Element einer Menge von VP.-Bereichen, welche man eineindeutig den positiven Zahlen zuordnen kann, und es sei x die dem Element G entsprechende Zahl. Falls dann die in obenstehender Definition genannten Zahlen m , n , a , und b , beschränkt sind (d. h. absolut genommen unterhalb einer festen, von x unabhängigen Schranke liegen) und bei jedem Jordanbogen σ_n der absolut größte Wert des Krümmungsradius $O(\sqrt{x})$ bei wachsendem x ist, dann ist die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches G

$$J(G) - \sum_{v=1}^n \frac{\psi(c_v) l_v}{\sqrt{a_v^2 + b_v^2}} + O(\sqrt{x}).$$

In dieser Formel bezeichnet $J(G)$ den Flächeninhalt von G , l_v die Länge der Strecke λ_v , und wir haben gesetzt

$$\psi(c_v) = c_v - [c_v] - \frac{1}{2}.$$

Bevor ich diese Einleitung schließe, möchte ich noch Herrn Landau danken für die große Freundlichkeit, daß er 1918 ein Manuskript von meiner Hand gelesen und mit vielen wertvollen fördernden Winken und ausführlichen Literaturangaben versehen hat. Diese von mir sehr geschätzten Bemerkungen brachten mich dazu, meine Dissertation und die vorliegende Note gänzlich umzuarbeiten. Auch bin ich Herrn Landau sehr verpflichtet für eine Reihe von Verbesserungen, die er vor der Drucklegung bei diesem Artikel angebracht hat.

Ehe wir nunmehr den hier zu beweisenden Hauptsatz formulieren, seien einige Erklärungen vorausgeschickt:

Es sei G ein beliebiger VP.-Bereich und P ein beliebiger Punkt. Falls P nicht einen Eckpunkt von G bildet, setzen wir $\Theta(G, P) = 1, 0$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem P innerhalb, außerhalb oder auf dem Rande von G liegt; bildet P einen Eckpunkt von G und zwar den gemeinschaftlichen Punkt zweier geraden Randstrecken, dann verstehen wir unter $2\pi\Theta(G, P)$

den zwischen 0 und 2π enthaltenen Winkel, welcher von diesen Randstrecken eingeschlossen wird und in der Umgebung von P an derselben Seite dieser Strecken liegt wie G selbst; bildet P schließlich einen anderen Eckpunkt von G , so definieren wir $\Theta(G, P)$ auf ähnliche Weise, mit der Maßgabe, daß ein Jordanbogen σ_μ , der in P endet, durch die Tangente in P ersetzt wird. Aus dieser Definition von $\Theta(G, P)$ geht unmittelbar hervor

$$(2) \quad \Theta(G, P) = \Theta(G_1, P) + \Theta(G_2, P),$$

wenn G in zwei VP.-Bereiche G_1 und G_2 zerlegt wird.

Es bezeichne $A(G)$ die Summe $\sum \Theta(G, P)$, ausgedehnt über alle Gitterpunkte P der Ebene, d. h. es sei $A(G)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Gebietes G , falls Eckpunkte mit einem bestimmten Betrage und andere Randpunkte mit $\frac{1}{2}$ in Anschlag gebracht werden. Wegen (2) ist

$$A(G) = A(G_1) + A(G_2).$$

Wird nun $g_1(c_r) = 0$ oder $\psi(c_r)$ gesetzt, je nachdem c_r ganz oder nicht ganz ist, und setzen wir weiter

$$L(G) = \sum_{r=1}^n \frac{g_1(c_r) l_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}},$$

so ist ebenfalls

$$L(G) = L(G_1) + L(G_2).$$

Denn beide Seiten enthalten ja dieselben Glieder außer den rechts auftretenden Beiträgen der im gemeinschaftlichen Rande von G_1 und G_2 vorkommenden Strecken, und die Beiträge solch einer Strecke $au + bv = c$ zu $L(G_1)$ und $L(G_2)$ sind (von der Reihenfolge abgesehen) bzw.

$$\frac{g_1(c) l}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{g_1(-c) l}{\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}},$$

weil G_1 und G_2 an verschiedenen Seiten der Strecke liegen, und wegen $g_1(-c) = -g_1(c)$ verschwindet der Beitrag dieser Strecke zu $L(G_1) + L(G_2)$.

Wenn wir schließlich

$$T(G) = A(G) - J(G) + L(G)$$

setzen, so ist auch

$$T(G) = T(G_1) + T(G_2),$$

und hieraus folgt, falls G die algebraische Summe der endlich vielen VP.-Bereiche G_1, G_2, \dots ist, daß $T(G)$ die algebraische Summe von $T(G_1), T(G_2), \dots$ ist.

Das Ziel dieser Note ist nun, mittels der Voronoischen Methode folgenden Satz zu beweisen:

Es sei der VP.-Bereich $G^{(10)}$ begrenzt von einer Strecke parallel zur u -Achse, von zwei Strecken parallel zur v -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Voraussetzung B genügt, und wobei τ das Intervall $(\alpha, \beta) \left(\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha > 0\right)$ durchläuft¹⁷⁾. Wenn dann r eine Zahl bezeichnet, die größer als $(\cotg \alpha + 1)^3$ und größer als der absolute Betrag des Krümmungsradius in jedem Punkte von σ ist, so ist die Anzahl der Gitterpunkte auf σ kleiner als $16 r^{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \beta$ und

$$|T(G)| < 106 r^{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \beta^{18)}.$$

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Teile.

I. Es sei G zunächst ein beliebiger VP.-Bereich. Es ist klar, daß G durch die lineare Substitution

$$u = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}, \quad v = \gamma \bar{u} + \delta \bar{v},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganz sind und $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, in einen VP.-Bereich \bar{G} transformiert wird, und daß man die Gitterpunkte P vor der Transformation eindeutig den Gitterpunkten \bar{P} nach der Transformation zuordnen kann. Nach der Definition von $\Theta(G, P)$ ist dann $\Theta(G, P) = \Theta(\bar{G}, \bar{P})$, mit etwaiger Ausnahme der Eckpunkte; aber jedenfalls ist $1 \geq \Theta(G, P) \geq 0$ und $1 \geq \Theta(\bar{G}, \bar{P}) \geq 0$, so daß die Differenz zwischen $A(G)$ und $A(\bar{G})$ absolut genommen höchstens gleich der Anzahl der Eckpunkte von G ist. Die Strecke λ_r mit der Gleichung $a_r u + b_r v = c_r$ wird durch die Substitution transformiert in die Strecke $\bar{\lambda}_r$ mit der Gleichung

$$(a_r \alpha + b_r \gamma) \bar{u} + (a_r \beta + b_r \delta) \bar{v} = c_r.$$

Nach der Voraussetzung A sind die Koeffizienten a_r und b_r ganzzahlig und teilerfremd, während für jeden Innenpunkt u_0, v_0 von G , der in der Umgebung eines inneren Punktes der Strecke λ_r liegt, $a_r u_0 + b_r v_0 < c_r$ ist. Die Koeffizienten $a_r \alpha + b_r \gamma$ und $a_r \beta + b_r \delta$ sind auch ganz und teilerfremd; denn ein gemeinsamer Teiler würde ebenfalls in

$$\begin{aligned} \delta(a_r \alpha + b_r \gamma) - \gamma(a_r \beta + b_r \delta) &= \pm a_r \\ \text{und} \\ -\beta(a_r \alpha + b_r \gamma) + \alpha(a_r \beta + b_r \delta) &= \pm b_r \end{aligned}$$

aufgehen. Wenn weiter \bar{u}_0, \bar{v}_0 den transformierten Punkt zu u_0, v_0 bezeichnet, so ist

$$(a_r \alpha + b_r \gamma) \bar{u}_0 + (a_r \beta + b_r \delta) \bar{v}_0 = a_r u_0 + b_r v_0 < c_r,$$

¹⁶⁾ In den Figuren 1 und 3 stellt BCDE den Bereich G dar.

¹⁷⁾ Die Ordinaten und die Abszissen der Punkte von σ sind also eindeutige Funktionen voneinander.

¹⁸⁾ Man kann leicht die Koeffizienten 16 und 106 verkleinern; doch hat dies keinen Zweck.

also

$$L(\bar{G}) = \sum_{r=1}^n \frac{g_1(c_r) \bar{l}_r}{\sqrt{(a_r \alpha + b_r \gamma)^2 + (a_r \beta + b_r \delta)^2}},$$

worin \bar{l}_r die Länge der Randstrecke \bar{l}_r von \bar{G} darstellt.

Weil der Flächeninhalt des Dreieckes, welches den Koordinatenursprung als Spitze und l_r als Basis hat, durch unsere Substitution wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ nicht verändert wird, ist

$$\frac{\frac{1}{2} c_r l_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}} = \frac{\frac{1}{2} c_r \bar{l}_r}{\sqrt{(a_r \alpha + b_r \gamma)^2 + (a_r \beta + b_r \delta)^2}},$$

also $L(G) = L(\bar{G})$, und mit Rücksicht auf $J(G) = J(\bar{G})$ geht aus der Definitionsgleichung für $T(G)$ hervor, daß der Unterschied zwischen $T(G)$ und $T(\bar{G})$ gleich dem Unterschiede zwischen $A(G)$ und $A(\bar{G})$, also absolut genommen höchstens gleich der Anzahl der Eckpunkte von G ist.

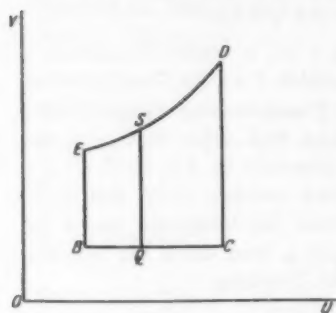


Fig. 1.

II. Es bezeichne G jetzt einen VP.-Bereich, der begrenzt wird von einer Strecke parallel zur u -Achse, von zwei Strecken parallel zur v -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Voraussetzung B genügt und wobei $\tau \geq 0$ und $\leq \frac{\pi}{2}$ ist; es stelle in Fig. 1 $BCDE$ den Bereich G dar. Falls (u_0, v_0) , (u_1, v_1) , (u_1, v_1) und (u_0, v_0) die Koordinaten-

paare bzw. von B, C, D und E bezeichnen, und $u_1 > u_0$, $v_1 > v_0 > v_2$ ist, wird G begrenzt von dem Jordanbogen ED und von den Strecken

$$BC \dots -v = -v_2, \quad CD \dots u = u_1, \quad BE \dots -u = -u_0;$$

diese Gleichungen haben die Eigenschaft, daß für die Punkte innerhalb G die linke Seite kleiner als die rechte Seite ist; also ist

$$\begin{aligned} L(G) &= \frac{g_1(-v_2) \cdot BC}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}} + \frac{g_1(u_1) \cdot CD}{\sqrt{1^2 + 0^2}} + \frac{g_1(-u_0) \cdot BE}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2}} \\ &= -g_1(v_2) \cdot BC + g_1(u_1) \cdot CD - g_1(u_0) \cdot BE, \end{aligned}$$

wo BC, CD und BE die Längen der entsprechenden Strecken bezeichnen. Die Festsetzung $u_1 > u_0$ und $v_1 > v_0 > v_2$ ist im vorstehenden nur der Bequemlichkeit halber getroffen, und die hier gegebene Beweisaneinanderordnung ist mutatis mutandis auch in den anderen Fällen gültig.

Länge des Jordanbogens DE ändert sich τ monoton und ist

≥ 0 und $\leq \frac{\pi}{2}$, so daß die Linie $u = \bar{u}$ (\bar{u} ganz; $u_1 \geq \bar{u} \geq u_0$) BC und DE in zwei Punkten Q und S mit Ordinaten v_s und \bar{v} schneidet. Wir ersetzen nun \bar{u} und \bar{v} der Einfachheit halber durch u und v , so daß u und v die Koordinaten des Punktes S bezeichnen und also eindeutige Funktionen voneinander sind. Falls die etwaigen Gitterpunkte Q und S mit $\frac{1}{2}$ in Anschlag gebracht werden, ist die Anzahl der Gitterpunkte auf der Strecke QS

$$r_u = \sum_{v=v_s}^{\bar{v}} 1 = QS + g_1(v_s) - g_1(\bar{v})^{19)},$$

wo QS die Länge der Strecke bedeutet.

Wenn die obere Grenze von τ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist die Ordinate v von S und also auch die Länge der Strecke QS für $u_0 \leq u \leq u_1$ eine eindeutige beschränkte differentiiierbare Funktion der Abszisse u von S mit einer stetigen Derivierten $\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \tau \geq 0$; falls aber τ im Punkte D , bzw. E den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat, so ist die Länge von QS zwar eine eindeutige beschränkte Funktion von u , aber die Funktion hat dann nur für $u_0 \leq u < u_1$, bzw. für $u_0 < u \leq u_1$ eine stetige Derivierte.

Nach der Eulerschen Summenformel ist nun

$$\begin{aligned} \sum_{u=u_0}^{u_1} QS &= \int_{u_0}^{u_1} QS du - g_1(u_1) \cdot CD + g_1(u_0) \cdot BE + \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) \frac{dv}{du} du \\ &= J(G) - L(G) - g_1(v_s) \cdot BC + \int_{v_s}^{\bar{v}} g_1(u) dv \end{aligned}$$

und

$$g_1(v_s) \sum_{u=u_0}^{u_1} 1 = g_1(v_s) \cdot BC - g_1(v_s) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\},$$

also

$$\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u = J(G) - L(G) + \int_{v_s}^{\bar{v}} g_1(u) dv - g_1(v_s) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1(v).$$

Der Beitrag zu $\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ und zu $A(G)$ von einem nicht einen Eckpunkt von G bildenden Gitterpunkte innerhalb, außerhalb oder auf dem Rande von G ist bzw. 1, 0 oder $\frac{1}{2}$; der Beitrag eines etwaigen Gitterpunktes

¹⁹⁾ In dieser Abhandlung werden für u_0 oder u_1 ganz ($u_1 > u_0$) die Glieder in

$\sum_{u=u_0}^{u_1} f(u)$, worin $u = u_0$ oder u_1 ist, nur $\frac{1}{2}$ mal gezählt.

B, C, D oder E zu $\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ ist $\frac{1}{4}$ und zu $A(G)$ respektive $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \Theta(G, D)$ und $\Theta(G, E)$. Hieraus folgt, mit dem Zusatz, daß die rechten Seiten um $\Theta(G, D) - \frac{1}{4}$ oder (und) $\Theta(G, E) - \frac{1}{4}$ zu vermehren sind, wenn D oder (und) E mit einem Gitterpunkte zusammenfällt, $A(G) = \sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ und

$$(3) \quad T(G) = \int_{v_0}^v g_1(u) dv - g_1(v_2) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1(v).$$

Deshalb, und wegen $|g_1(u)| \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \geq \Theta(G, D) \geq 0$ und $\frac{1}{2} \geq \Theta(G, E) \geq 0$, geht aus (3) schließlich hervor

$$(4) \quad |T(G)| \leq \left| \int_{v_0}^{v_2} g_1(u) dv \right| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{u=u_0}^{u_1} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$|T(G)| \leq \left| \int_{v_0}^{v_2} g_1(u) dv \right| + \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} du + 1\frac{1}{2}.$$

Diese Beziehung bleibt gültig, wenn G ersetzt wird durch den Bereich G_1 , der begrenzt wird vom Jordanbogen DE und von den zwei Strecken durch E und D parallel bzw. zur u - und v -Achse; denn für ganzzahliges BE verschwindet, wie man sofort übersieht, die T -Größe des Rechteckes, von welchem drei Eckpunkte respektive mit B, C und E zusammenfallen, so daß dann $T(G_1) = T(BCDE)$ ist.

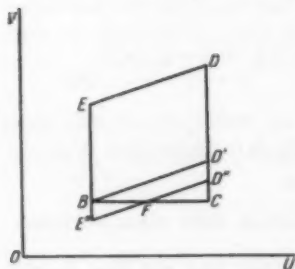


Fig. 2.

III. Ersetzt man in II den Jordanbogen σ durch die Strecke DE mit der Gleichung $au + bv = c$, wobei a und b ganzzahlig und teilerfremd sind, und $au + bv < c$ ist, so stellt G das in Fig. 2 gezeichnete rechtwinklige Trapez $BCDE$ dar, dessen parallele Seiten parallel zur v -Achse sind.

Wir setzen nun zunächst $b > 0$ voraus. Dann bleibt die Beweisanordnung dieselbe wie oben, mit der Ausnahme, daß nun $L(G)$ und deshalb auch $T(G)$ ein Glied, nämlich

$$\frac{g_1(c) \cdot DE}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c)$$

mehr enthält; wegen $v = \frac{c-au}{b}$ und $dv = -\frac{a}{b}du$ muß in diesem Falle die rechte Seite von (3) ersetzt werden durch

$$-\frac{a}{b} \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) du - g_1(v_2) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} + \left\{ \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c) - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1' \left(\frac{c-au}{b} \right) \right\}.$$

Da nun, wie man leicht nachweist,

$$(5) \quad \left| \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) du \right| \leq \frac{1}{8}$$

und

$$\left| \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c) - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1' \left(\frac{c-au}{b} \right) \right| \leq b,$$

so ergibt sich wegen $b \geq 1$

$$(6) \quad |T(G)| \leq \frac{|a|}{8b} + \frac{1}{2} + b + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}|a| + 2b,$$

und diese Ungleichung gilt auch für $b < 0$, wenn man b durch $|b|$ ersetzt.

Sie bleibt auch gültig, wenn das Trapez in das Dreieck BCD' entartet, falls BD' und ED parallel sind; denn für ganzzahliges BE findet man leicht die Beziehung $T(BD'DE) = 0$, also

$$T(BCD') = T(BCDE).$$

Auf dieselbe Art übersieht man, daß (6) auch gilt, wenn das Trapez in die Differenz der Dreiecke FCD'' und BFE'' entartet, falls $E''D''$ und ED parallel sind; denn für ganzes $E''E$ ist $T(E''D''DE) = 0$, weshalb

$$T(FCD'') - T(BFE'') = T(BCDE).$$

Ungleichung (6) ist ferner leicht zu übertragen auf ein (vielleicht in ein Dreieck oder in die Differenz von zwei Dreiecken entartetes) Trapez G_1 , dessen Seiten

$$\lambda, \dots, a, u + b, v = c, \quad (v = 1, 2, 3, 4)$$

(a , und b , ganzzahlig und teilerfremd) die Eigenschaft haben, daß λ_3 und λ_4 parallel sind und $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$ ist. Denn durch die lineare Substitution

$$\bar{u} = a_1 u + b_1 v, \quad \bar{v} = a_2 u + b_2 v,$$

wo a_2, b_2, a_1, b_1 ganz sind und $a_2 b_1 - a_1 b_2 = \pm 1$ ist, wird G_1 transformiert in ein Trapez \bar{G}_1 , von welchem eine Seite parallel zur u -Achse ist, und zwei Seiten parallel zur v -Achse sind, während die vierte Seite die Gleichung

$$(a_1 b_3 - a_3 b_1) \bar{u} - (a_2 b_3 - a_3 b_2) \bar{v} = \pm c_3$$

hat. Nach dem Vorhergehenden ist

$$|T(\bar{G}_1)| \leq \frac{1}{8} |a_1 b_3 - a_3 b_1| + 2 |a_2 b_3 - a_3 b_2|,$$

also wegen I

$$|T(G_1)| \leq |T(\bar{G}_1)| + 4 = \frac{1}{8} |a_1 b_3 - a_3 b_1| + 6 |a_2 b_3 - a_3 b_2|;$$

denn, weil λ_2 und λ_3 nicht parallel sind, ist $|a_2 b_3 - a_3 b_2| \geq 1$.

Es bezeichne nun weiter G_2 ein Vieleck²⁰⁾, das begrenzt wird von den einander folgenden Seiten

$$\lambda_r \dots a_r u + b_r v = c_r \quad (n \geq 2; r = 0, 1, \dots, n)$$

(a_r und b_r ganzzahlig und teilerfremd), mit der Eigenschaft

$$|a_1 b_0 - a_0 b_1| = |a_2 b_1 - a_1 b_2| = \dots = |a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n| = 1^{21)}.$$

Zieht man durch den Schnittpunkt von λ_0 und λ_n die geraden Linien $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-2}$, parallel bzw. zu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$, dann kann das Gebiet G_2 zerlegt werden in die algebraische Summe der durch $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_{r-1}, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \lambda'_r$ ($2 \leq r \leq n-2$) und $\lambda'_{n-2}, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ begrenzten Trapeze, von denen einige in ein Dreieck oder in die Differenz von zwei Dreiecken entarten können (wie z. B. mit dem letzten Trapez stets der Fall ist). Nach dem Vorhergehenden ist jedenfalls

$$\begin{aligned} |T(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda'_1)| &\leq 6 |a_2 b_1 - a_1 b_2| + \frac{1}{8} |a_3 b_0 - a_0 b_3| = 6 + \frac{1}{8} |a_3 b_0 - a_0 b_3|, \\ |T(\lambda'_{r-1} \lambda_r \lambda_{r+1} \lambda'_r)| &\leq 6 |a_{r+1} b_r - a_r b_{r+1}| + \frac{1}{8} |a_{r+1} b_{r-1} - a_{r-1} b_{r+1}| \\ &= 6 + \frac{1}{8} |a_{r+1} b_{r-1} - a_{r-1} b_{r+1}| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |T(\lambda'_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n)| &\leq 6 |a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n| + \frac{1}{8} |a_n b_{n-2} - a_{n-2} b_n| \\ &= 6 + \frac{1}{8} |a_n b_{n-2} - a_{n-2} b_n|, \end{aligned}$$

also

$$(7) \quad |T(G_2)| < 6n + \frac{1}{8} \sum_{r=1}^{n-1} |a_{r+1} b_{r-1} - a_{r-1} b_{r+1}|.$$

IV. Es sei der VP.-Bereich G begrenzt von den zwei Strecken $-au + bv = c$ und $-a'u + b'v = c'$, deren Koeffizienten a, b, a', b' positive ganze Zahlen sind mit der Eigenschaft $a'b - ab' = \pm 1$ (also $\frac{a'}{b'} \geq \frac{a}{b}$), und von einem Jordanbogen σ , welcher der Bedingung B genügt, und bei welchem $\operatorname{tg} \tau$ in dem Intervalle $\frac{a}{b} \dots \frac{a'}{b'}$ (inkl. Grenzen)

²⁰⁾ Unter Vieleck verstehe ich hier den Bereich, der begrenzt wird von einem geschlossenen, doppelpunktlosen Streckenzug (mit endlich vielen Seiten).

²¹⁾ $|a_n b_n - a_n b_0|$ braucht also nicht 1 zu sein.

liegt, und der absolute Betrag des Krümmungsradius in jedem Punkte kleiner als eine bestimmte Konstante r ist.

Durch die lineare Substitution

$$\bar{u} = -au + bv, \quad \bar{v} = a'u - b'v,$$

wo a, b, a', b' ganz sind und $a'b - ab' = \pm 1$ ist, transformieren wir G in einen VP.-Bereich \bar{G} , der begrenzt wird von zwei Strecken parallel zu den Koordinatenachsen und von einem Jordanbogen $\bar{\sigma}$; wir bezeichnen die Werte von $\tau, u, v, \bar{u}, \bar{v}$ in einem der Endpunkte von σ durch $\tau_0, u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0$ und in dem anderen durch $\tau_1, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1$.

Beim Beweise werden wir $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$ voraussetzen, da wir den anderen Fall $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ nach derselben Methode behandeln können. Weiter setzen wir bequemlichkeitshalber $\tau_1 > \tau_0$, $\bar{u}_1 > \bar{u}_0$ und $\bar{v}_1 > \bar{v}_0$ voraus. Nach I und (4) ist dann

$$|T(G)| \leq |T(\bar{G})| + 3 \leq \left| \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} \right| + \frac{1}{2} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} + 4 \frac{1}{2},$$

und mit Rücksicht auf

$$(8) \quad d\bar{u} = -a du + b dv = b \varrho(\tau) \cos \tau \left(\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b} \right) d\tau,$$

$$\frac{d\bar{u}}{d \operatorname{tg} \tau} < b r \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) \frac{d\tau}{d \operatorname{tg} \tau} = \frac{r d\tau}{b' d \operatorname{tg} \tau} < \frac{r}{b'}.$$

findet man

$$(9) \quad \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} < \frac{r}{b'} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d \operatorname{tg} \tau = \frac{r}{b'} (\operatorname{tg} \tau_1 - \operatorname{tg} \tau_0) \leq \frac{r}{b'} \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) = \frac{r}{bb'^2},$$

also

$$|T(G)| < \left| \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} \right| + \frac{r}{2bb'^2} + 4 \frac{1}{2}.$$

Wegen $u = b\bar{v} + b'\bar{u}$ ist

$$b d\bar{v} = du - b' d\bar{u} = \varrho(\tau) \cos \tau d\tau - b' d\bar{u},$$

weshalb

$$(10) \quad \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} = w - \frac{b'}{b} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{u},$$

wo

$$w = \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_1} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

gesetzt ist. Wie schon in (5) bemerkt wurde, ist das letzte Integral in (10) absolut $\leq \frac{1}{n}$, also

$$(11) \quad |T(G)| < |w| + \frac{b'}{8b} + \frac{r}{2bb'^2} + 4\frac{1}{2}.$$

Wir führen nun τ_2 ein durch die Definition

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{1}{2b^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $\tau_2 \geq \tau_1$ ist

$$|w| \leq \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_2} \frac{1}{2} r d\tau = \frac{r(\tau_2 - \tau_0)}{2b} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{1}{2}}}.$$

Falls $\tau_2 < \tau_1$ ist, nennen wir \bar{u}_2 den zu τ_2 gehörenden Wert von \bar{u} ; dann ist $w = w' + w''$, wobei

$$w' = \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_2} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

wieder absolut $\leq \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{1}{2}}}$ ist, während

$$w'' = \frac{1}{b} \int_{\tau_2}^{\tau_1} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

nach (8) den Wert

$$\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} \frac{g_1(\bar{u}) d\bar{u}}{\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b}}$$

hat. Da für $\tau_1 \geq \tau \geq \tau_2$ die monotone positive Funktion $\frac{1}{\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b}}$ nicht größer als

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_0} = \frac{1}{\int_{\tau_0}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\cos^2 \tau}} \leq \frac{1}{\int_{\tau_0}^{\tau_2} d\tau} = 2b^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}$$

ist, erhält man nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$|w''| \leq \frac{2b^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}}{8b^{\frac{1}{2}}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{1}{2}}},$$

so daß $|w|$ in jedem Falle $\leq \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}}$ ist. Nach (11) ist also schließlich

$$(12) \quad |T(G)| < \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}} + \frac{b'}{8b} + \frac{r}{2bb'^2} + 4\frac{1}{2},$$

und die Anzahl der Gitterpunkte auf σ ist gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf $\bar{\sigma}$, also nach (9) höchstens

$$(13) \quad \sum_{\bar{u}=\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} 1 \leq \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} + 1 \leq \frac{r}{b\bar{b}'} + 1.$$

V. Es bezeichne G jetzt wieder den in dem Hauptsatze genannten Bereich, der z. B. die in den Figuren 1 und 3 für $BCDE$ angegebene Form haben kann.

Ordnet man die reduzierten Brüche, deren Nenner kleiner als $r^{\frac{1}{2}}$ sind, mit Zuziehung der uneigentlichen Brüche $\frac{0}{1}, \frac{1}{b}$ in eine steigende Reihe und bezeichnet mit $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ irgend zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder derselben, so hat man stets

$$b + b' \geq r^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad a'b - b'a = 1^{29}).$$

Unter diesen Brüchen ist mindestens einer $\geq \operatorname{tg} \beta$, nämlich $\frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1}$, und wegen $r^{\frac{1}{2}} > \cotg \alpha + 1$ mindestens ein von $\frac{0}{1}$ verschiedener $\leq \operatorname{tg} \alpha$, nämlich $\frac{1}{[\cotg \alpha + 1]}$, so daß wir aus der von diesen Brüchen gebildeten Reihe einen Teil

$$\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \quad (n \geq 1)$$

herausgreifen können, für den $\frac{a_m}{b_m} \leq \operatorname{tg} \alpha < \frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} < \operatorname{tg} \beta \leq \frac{a_n}{b_n}$ ist, und diese Brüche genügen für $1 \leq m \leq n$ den Beziehungen

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1 \quad \text{und} \quad b_m + b_{m-1} \geq r^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{b_0 b_1} \leq \frac{a_0}{b_0}$$

ist

$$\frac{a_0}{b_0} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{b_1} > \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

und auf dieselbe Art beweist man $\frac{a_n}{b_n} < 2 \operatorname{tg} \beta$. Aus

$$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\cotg \alpha + 1} > r^{-\frac{1}{2}}$$

und $r > 1$ folgt

$$b_m < r^{\frac{1}{2}} < r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta$$

und

$$a_m \leq \frac{a_n}{b_n} \cdot b_m < 2 \operatorname{tg} \beta \cdot r^{\frac{1}{2}} < 2 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta.$$

²⁹⁾ Vgl. z. B. P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, erster Teil (1902), S. 121–124; Teubner (Leipzig).

Führen wir die Zahlen $a'_m = a_{m-1} + a_m$ und $b'_m = b_{m-1} + b_m$ für $1 \leq m \leq n$ ein, so ist $b'_m \geq r^{\frac{1}{2}}$,

$$(14) \quad a'_m b_{m-1} - a_{m-1} b'_m = (a_{m-1} + a_m) b_{m-1} - a_{m-1} (b_{m-1} + b_m) = 1$$

und

$$(15) \quad a_m b'_m - a'_m b_m = a_m (b_{m-1} + b_m) - (a_{m-1} + a_m) b_m = 1.$$

Sei zunächst $\operatorname{tg} \alpha < \frac{a'_1}{b'_1}$ und $\operatorname{tg} \beta > \frac{a'_n}{b'_n}$; setzen wir $\operatorname{tg} \tau_m = \frac{a_m}{b_m}$ und

$\operatorname{tg} \tau'_m = \frac{a'_m}{b'_m} \left(\frac{\pi}{2} > \tau_m > 0; \frac{\pi}{2} > \tau'_m > 0 \right)$, so erhalten wir

$$\tau_0 \leq \alpha < \tau'_1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau'_n < \beta \leq \tau_n.$$

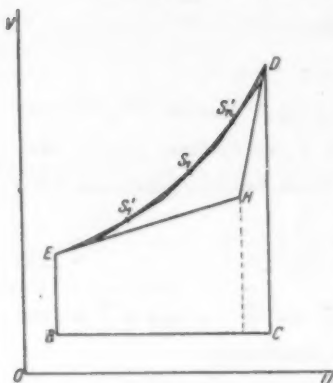


Fig. 3.

Wir nennen (siehe Fig. 3) die Punkte auf σ , in denen τ die Werte $\tau'_1, \tau_1, \dots, \tau'_n$ hat, bzw. S'_1, S_1, \dots, S'_n ; weiter ziehen wir durch E die Linie $-a_0 u + b_0 v = \text{Konstante}$ und durch D die Linie $-a_n u + b_n v = \text{Konstante}$ und ziehen die Tangenten in den Punkten S'_1, S_1, \dots, S'_n . Auf diese Weise ist G dargestellt als die algebraische Summe von zwei Polygonen und einer Anzahl Segmente; bisweilen, z. B. falls G den in Fig. 3 gezeichneten Bereich $BCDHE$ bezeichnet, darf man den Ausdruck „algebraische Summe“ schlechthin durch „Summe“ ersetzen. Durch eine Linie parallel zur

v -Achse zerteile man eins der Polygone, nämlich $BCDHE$ in zwei Trapeze; dann ist wegen (6)

$$\begin{aligned} |T(BCDHE)| &< \frac{1}{8} a_0 + 2b_0 + \frac{1}{8} a_n + 2b_n \\ &< \left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} + 2 \right) r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta < 9r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Aus (14) und (15) folgt, daß das andere Polygon, das wir G_1 nennen wollen, und das begrenzt wird von EH , DH und den Tangenten, die in III vorausgesetzten Bedingungen erfüllt, so daß nach (7)

$$|T(G_1)| < 6 \cdot 2n + \frac{1}{8} \{ (a_1 b_0 - a_0 b_1) + (a'_1 b'_1 - a'_1 b'_1) + \dots + (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \}$$

$$= 12n + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^n (a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m) + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} (a'_{m+1} b'_m - a'_m b'_{m+1});$$

wegen

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1, \quad a'_{m+1} b'_m - a'_m b'_{m+1} = 2 + \frac{b_{m-1}}{b_m} + \frac{b_{m+1}}{b_m}$$

ist also

$$|T(G_1)| < 12 \frac{3}{8} n + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{b_{m-1}}{b_m} + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{b_{m+1}}{b_m},$$

und weil sowohl 1 als $\frac{b_{m-1}}{b_m} = \frac{b_{m-1} \frac{1}{b_m}}{\frac{1}{b_m}}$ und ebenso auch $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ kleiner als

$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m}$ ist, so erhält man die Ungleichung

$$|T(G_1)| < 12 \frac{5}{8} r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{b_m}.$$

Es bleiben nun noch die Segmente zwischen der Kurve σ und den Paaren aufeinanderfolgender Seiten des Vieleckes G_1 zu berücksichtigen. Man kann dieselben in zwei Gruppen einteilen, derart, daß jedes Segment der ersten Gruppe von σ und von den geraden Linien $-a_m u + b_m v = \text{Konstante}$ und $-a'_{m+1} u + b'_{m+1} v = \text{Konstante}$ ($n-1 \geq m \geq 0$) und jedes Segment der zweiten Gruppe von σ und von den geraden Linien $-a'_m u + b'_m v = \text{Konstante}$ und $-a_m u + b_m v = \text{Konstante}$ ($n \geq m \geq 1$) begrenzt wird. Bei jedem Segment der ersten Gruppe ist $r'_{m+1} \geq r \geq r_m$, so daß die zu diesem Segmente gehörige T -Größe nach (12) absolut kleiner ist als

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2 b_m} + \frac{b_m + b_{m+1}}{8 b_m} + \frac{r}{2 b_m b_{m+1}} + 4 \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{2} \right) \frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m^{\frac{3}{2}}} = 5 \frac{3}{4} \frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m^{\frac{3}{2}}},$$

und da man dies für die Segmente der zweiten Gruppe auf dieselbe Art beweist, findet man somit

$$\begin{aligned} |T(G)| &< 9 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta + \left(12 \frac{5}{8} + 5 \frac{3}{4} + 5 \frac{3}{4} \right) r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}} \\ &= 9 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta + 24 \frac{1}{8} r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{a_m}{b_m} < 2 \operatorname{tg} \beta$ und $b_m < r^{\frac{1}{2}}$ ist nun weiter

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}} \leq \sum_{b=1}^{\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2 \operatorname{tg} \beta}} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \sum_{a=1}^{2 b \operatorname{tg} \beta} 1 \leq 2 \operatorname{tg} \beta \sum_{b=1}^{\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2 \operatorname{tg} \beta}} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \leq 4 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta,$$

also schließlich

$$|T(G)| < (9 + 24 \frac{1}{8} \times 4) r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta < 106 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta.$$

Diese Ungleichung ist nun erst bewiesen für den Fall $\alpha < \tau'_1$ und $\beta > \tau'_n$, aber die Beweisordnung bleibt dieselbe für die anderen Fälle; diese sind $\alpha < \tau'_1$ und $\beta \leq \tau'_n$; $\alpha \geq \tau'_1$ und $\beta > \tau'_n$; $\alpha \geq \tau'_1$ und $\beta \leq \tau'_n$. Im letzten Falle z. B. fallen die Punkte S'_1 und S'_n weg. Ziehen wir dann durch E und D die Linien $-a'_1 u + b'_1 v = \text{Konstante}$ und $-a'_n u + b'_n v = \text{Konstante}$, so ist nach (6)

$$|T(BCDHE)| < \frac{1}{3}a'_1 + \frac{1}{3}a'_n + 2b'_1 + 2b'_n \\ = \frac{1}{3}(a_0 + a_1 + a_{n-1} + a_n) + 2(b_0 + b_1 + b_{n-1} + b_n) < 9r^{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \beta,$$

während die Ungleichungen für das zweite Polygon und für die Segmente (die zwei verschwundenen Segmente natürlich außer Betracht gelassen) a fortiori gelten. Hiermit ist die Ungleichung in vollem Umfang bewiesen.

Nach der Schlußformel von IV (Formel 13) ist die Anzahl der Gitterpunkte auf einem zur ersten Gruppe gehörenden Segment von σ höchstens

$$\frac{r}{b_m b_{m+1}} + 1 < \frac{2r^{\frac{1}{3}}}{b_m^{\frac{1}{3}}},$$

mit demselben Ergebnis bei dem zu den Segmenten zweiter Gruppe gehörigen Segment, so daß die Anzahl aller Gitterpunkte auf dem in $2n$, $2n-1$ oder $2n-2$ Teile zerlegten Jordanbogen σ , kleiner ist als

$$4r^{\frac{1}{3}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{1}{3}}} \leq 16r^{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \beta.$$

Da jetzt der Satz in allen Teilen bewiesen ist, bleibt uns nur noch übrig, das in der Einleitung erwähnte Korollar aus diesem Satze abzuleiten. Es bezeichne daher G den in dem Korollar genannten Bereich. Wenn man die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf den Randsegmenten λ_r und σ_μ von G liegen, jedoch nicht einen Eckpunkt von G bilden, bzw. $B(\lambda_r)$ und $B(\sigma_\mu)$ nennt, kommt es nur darauf an zu beweisen, daß

$$(16) \quad T(G) = O(\sqrt[3]{x}) \quad \text{und} \quad B(\sigma_\mu) = O(\sqrt[3]{x}) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots, m.$$

Es ist ja

$$A(G) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n B(\lambda_r) + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m B(\sigma_\mu)$$

die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches G , falls die einen Eckpunkt bildenden Gitterpunkte mit einem bestimmten Betrage ≥ 0 und ≤ 1 in Anschlag gebracht werden; die Anzahl der Eckpunkte von G ist beschränkt, so daß, wenn die Beziehungen (16) gelten, die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rande und innerhalb G

$$A(G) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n B(\lambda_r) + O(\sqrt[3]{x}) = J(G) - \sum_{r=1}^n \frac{g_1(c_r) l_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n B(\lambda_r) + O(\sqrt[3]{x})$$

ist. Für nicht ganzes c_r ist $B(\lambda_r) = 0$ und $\psi(c_r) = g_1(c_r)$, und für ganzes c_r ist der Unterschied zwischen $B(\lambda_r)$ und $\frac{l_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}}$ höchstens 1 und

$\psi(c_r) = g_1(c_r) - \frac{1}{2}$, so daß dann die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches

$$J(G) - \sum_{r=1}^n \frac{\psi(c_r) l_r}{\sqrt{a_r^2 + b_r^2}} + O(\sqrt[3]{x})$$

ist.

Beim Beweise der Beziehungen (16) dürfen wir noch voraussetzen, daß G die in den Figuren 1 und 3 für $BCDE$ angegebene Form hat, d. h. daß G begrenzt wird von zwei Strecken parallel zur V -Achse, von einer Strecke parallel zur U -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Bedingung B genügt, und wobei τ das Intervall (α, β) ($\frac{\pi}{4} \geq \beta > \alpha \geq 0$) durchläuft; sonst kann man ja den Bereich mittels einer beschränkten Anzahl Strecken parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen in eine beschränkte Anzahl VP.-Bereiche, welche nach etwaiger Umkehrung oder (bzw. und) Vertauschung der Koordinatenachsen diesen Bedingungen genügen und in eine beschränkte Anzahl rechtwinkliger Trapeze, der Art, daß von jedem Trapeze drei Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und die vierte Seite eine der Strecken λ_r ist, so daß die zu diesem Trapeze gehörige T -Größe nach (6) einen beschränkten Wert hat.

Außerdem dürfen wir uns noch beschränken auf die Fälle $\cotg \alpha \leq \sqrt[3]{x}$ und $\cotg \beta \geq \sqrt[3]{x}$; denn, falls $\cotg \alpha > \sqrt[3]{x} > \cotg \beta$ ist, können wir G in zwei VP.-Bereiche zerteilen, indem wir parallel zur V -Achse eine Strecke ziehen durch den Punkt auf σ , in welchem $\cotg \tau = \sqrt[3]{x}$ ist, und jeder dieser Bereiche genügt der ersten oder der zweiten Bedingung.

Ist $\cotg \beta \geq \sqrt[3]{x}$, und bezeichnen u_0, v_0 und u_1, v_1 die Koordinatenpaare der Endpunkte von σ , so ist für $u_1 > u_0$ die Anzahl $B(\sigma)$ der von den beiden Endpunkten des Bogens σ verschiedenen Gitterpunkte auf σ kleiner als

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u_1} du + 1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\tau) \cos \tau d\tau + 1 = \int_{\alpha}^{\beta} O(\sqrt{x}) d\tau + 1 \\ &= O(\beta \sqrt{x}) + 1 = O(\operatorname{tg} \beta \sqrt{x}) + 1 = O\left(\frac{\sqrt{x}}{2^*}\right), \end{aligned}$$

und nach (4) ist dann

$$|T(G)| \leq \left| \int_{u_0}^{v_1} g_1(u) dv \right| + \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} du + 1 \frac{1}{2} = O(\sqrt[3]{x}) + \left| \int_{u_0}^{v_1} g_1(u) dv \right|,$$

worin das Schlußglied höchstens

$$\left| \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2} dv \right| = \frac{1}{2} \int_a^{\beta} \varrho(\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_a^{\beta} O(\sqrt{x}) d\tau = O(\sqrt[3]{x})$$

ist.

Ist jedoch $\cotg \alpha \leq \sqrt[3]{x}$, also $(\cotg \alpha + 1)^3 = O(\sqrt{x})$, so folgen die Beziehungen (16) unmittelbar aus dem oben bewiesenen Satze, wenn man darin $r = O(\sqrt{x})$ und $\tg \beta \leq 1$ setzt.

(Angenommen Dezember 1919.)

Über die Existenz einer endlichen Basis bei Systemen von Potenzprodukten.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Zu den interessantesten Fragestellungen der Algebra gehört sicher die Frage nach den Bedingungen für die *Endlichkeit* eines Systems von Polynomen, also nach den Bedingungen, unter welchen alle Polynome des Systems sich ganz rational durch endlich viele unter ihnen — durch eine endliche Basis — ausdrücken lassen. Man hatte für viele Systeme von Polynomen, besonders für in der Invariantentheorie vorkommende, den Endlichkeitsbeweis geführt, es waren indessen bis zur letzten Zeit in keinem Falle *notwendige* und hinreichende Bedingungen vollständig diskutiert worden. In einer vor einigen Jahren in diesen Annalen erschienenen Arbeit¹⁾ hatte ich für solche Systeme von Polynomen, die aus *Potenzprodukten* bestehen, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer endlichen Basis aufgestellt. Indessen läßt sich den Bedingungen, die ich aufgestellt hatte, eine erheblich einfachere Form geben, und auch der Beweis läßt sich viel übersichtlicher und einheitlicher führen, wenn man das Resultat geometrisch interpretiert und dabei von vornherein *homogene* Tetraederkoordinaten benutzt. Da das Resultat, in dem algebraische, geometrische und mengentheoretische Momente in merkwürdiger Weise verknüpft werden, vielleicht einiges Interesse darbietet, möchte ich in den folgenden Zeilen kurz auf die Frage zurückkommen.

Hat man Potenzprodukte aus zwei Variablen x, y : $x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$, so lautet unser Kriterium: *Das System der Potenzprodukte $x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ besitzt dann und nur dann eine endliche Basis, wenn in der Menge der Zahlen $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ sowohl ihre obere als auch ihre untere Grenze enthalten ist.* Dabei legen wir

¹⁾ Über die Existenz einer endlichen Basis bei gewissen Funktionensystemen. Math. Ann. 75 (1918) S. 94 ff.

$\frac{\alpha_i}{0}$ den Wert $+\infty$ bei und schließen den Fall $\alpha_i = \beta_i = 0$ aus. — Um dies geometrisch deuten zu können, ordnen wir allgemein dem Potenzprodukt $x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ einen Punkt P_i auf einer Geraden zu, dessen homogene Koordinaten α_i, β_i sind. Dabei sollen aber der 0- und ∞ -Punkt im Endlichen liegen, und der Einheitspunkt zwischen ihnen. Dann ist für die Existenz einer endlichen Basis bei dem System $x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ notwendig und hinreichend, daß alle Punkte P_i innerhalb einer Strecke liegen, deren Endpunkte auch Punkte P_i sind. Alle Punkte P_i müssen dann zwischen zwei von ihnen liegen.

In dieser Form läßt sich unser Satz sofort auf den Fall beliebig vieler Variablen verallgemeinern. An die Stelle einer Strecke tritt dann ein konvexes Polyeder. Es sei $U_i = x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} \dots$ ein beliebiges System von Potenzprodukten. Man fasse das System $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$ der Exponenten von U_i als homogene Koordinaten eines Punktes P_i in bezug auf ein ganz im Endlichen liegendes, den Punkt $(1, 1, 1, \dots)$ im Innern enthaltendes Koordinatentetraeder (bzw. Koordinatensimplex) auf und bilde den kleinsten abgeschlossenen konvexen Körper, der die Punktmenge P_i enthält. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß das System der Potenzprodukte U_i eine endliche Basis besitzt, daß dieser konvexe Körper ein konvexes Polyeder ist, in dessen endlich vielen Ecken Punkte P_i liegen. Mit anderen Worten, die Punkte P_i müssen innerhalb oder auf dem Rande eines konvexen Polyeders liegen, dessen endlich viele Ecken aus gewissen Punkten P_i bestehen.

Wir schicken dem Beweis die Bemerkung voraus, daß, wenn $P = (\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ und $P' = (\alpha', \beta', \gamma', \dots)$ zwei im Endlichen liegende Punkte mit nicht negativen homogenen Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ und $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ sind, der Punkt $\lambda P + \lambda' P' = (\lambda\alpha + \lambda'\alpha', \lambda\beta + \lambda'\beta', \lambda\gamma + \lambda'\gamma', \dots)$ für nicht negative λ, λ' auf der Strecke PP' liegt. Denn die Punkte P und P' sind Schwerpunkte des Koordinatentetraeders, falls man die Ecken mit den Massen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bzw. $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ belegt. Belegt man aber die Ecken mit den Massen $\lambda\alpha + \lambda'\alpha', \lambda\beta + \lambda'\beta', \dots$, so ist dieser Belegung äquivalent die Belegung der beiden Punkte P und P' mit den Massen $\lambda\alpha + \lambda\beta + \dots$ bzw. $\lambda'\alpha' + \lambda'\beta' + \dots$, und der Schwerpunkt der beiden Punkte P und P' bei diesen Belegungen liegt offenbar auf der Strecke PP' .

Andererseits sieht man sofort ein, daß, wenn ein Potenzprodukt U_i sich ganz rational durch gewisse Potenzprodukte $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_r}$ ausdrücken läßt, U_i sich auch als ein Potenzprodukt der $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_r}$ darstellen läßt. Bilden daher die Potenzprodukte $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_r}$ eine endliche Basis der U_i , so läßt sich jeder Punkt P_i linear mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten aus $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$ kombinieren. Daraus folgt aber

nach der obigen Bemerkung, daß jeder Punkt P_i innerhalb des kleinsten die endlich vielen Punkte $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$ enthaltenden konvexen Polyeders liegt. Damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß jeder Punkt P_i im Innern oder auf dem Rande eines konvexen Polyeders mit den Ecken $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$ liegt. Zerlegen wir dieses Polyeder in Tetraeder (oder im Falle mehrdimensionaler Räume in Simplexe), deren Ecken gewisse unter den Punkten $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}$ sind, so liegt jeder Punkt P_i im Innern oder auf dem Rande wenigstens eines von diesen Tetraedern. Es genügt daher, die Endlichkeit für solche Potenzprodukte zu beweisen, deren Bildpunkte innerhalb oder auf dem Rande eines bestimmten von diesen Tetraedern liegen. Wir nehmen daher an, daß alle Punkte P_i innerhalb (oder auf dem Rande) eines Tetraeders mit den Ecken $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$ liegen. Dann sind die vier Ecken P_{i_1}, \dots, P_{i_4} linear unabhängig und jeder Punkt P_i läßt sich in der Form darstellen

$$\lambda_1^{(i)} P_{i_1} + \lambda_2^{(i)} P_{i_2} + \lambda_3^{(i)} P_{i_3} + \lambda_4^{(i)} P_{i_4}$$

mit nichtnegativen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, und zwar im wesentlichen, bis auf eine beliebige multiplikative Konstante, *auf eine einzige Weise*. Infolgedessen lassen sich die Zahlen $\lambda^{(i)}$ als *rationale* Zahlen mit einem von i unabhängigen Nenner d wählen, und die d -te Potenz jedes U_i ist als ein Potenzprodukt der U_{i_1}, \dots, U_{i_4} darstellbar

$$U_i^d = U_{i_1}^{\mu_1^{(i)}} U_{i_2}^{\mu_2^{(i)}} U_{i_3}^{\mu_3^{(i)}} U_{i_4}^{\mu_4^{(i)}}.$$

Wir teilen nun alle U_i in d^4 Abteilungen, so daß in jeder Abteilung alle $\mu_1^{(i)}$ einander modulo d kongruent sind, ebenso alle $\mu_2^{(i)}, \mu_3^{(i)}$ und endlich auch alle $\mu_4^{(i)}$. Es genügt den Beweis für jede von diesen Abteilungen einzeln zu führen, und wir nehmen daher an, daß alle U_i einer bestimmten Abteilung angehören.

Wir betrachten jetzt das System der Potenzprodukte

$$\Phi_i = \xi^{\mu_1^{(i)}} \dots \eta^{\mu_4^{(i)}}.$$

Nach dem Hilbertschen Satz über die Modulbasis gibt es endlich viele Φ : $\Phi_{k_1}, \Phi_{k_2}, \dots, \Phi_{k_\mu}$, so daß jedes Φ_i sich in der Form schreiben läßt

$$\Phi_i = M_1 \Phi_{k_1} + M_2 \Phi_{k_2} + \dots + M_\mu \Phi_{k_\mu},$$

wo M_1, \dots, M_μ Polynome in ξ, \dots, η sind. Aus dieser Relation folgt aber, daß Φ_i durch wenigstens eines unter den Φ_{k_j} teilbar ist. Ist nun Φ_i etwa durch Φ_{k_1} teilbar, so ist der Quotient die d -te Potenz eines

Potenzproduktes in ξ, \dots, η . Daher ist dann der Quotient von U_i durch U_{k_i} ein Potenzprodukt aus U_{i_1}, \dots, U_{i_s} . Infolgedessen lassen sich alle U_i ganz rational durch $U_{i_1}, \dots, U_{i_s}, U_{k_1}, \dots, U_{k_n}$ darstellen, w. z. b. w.²⁾. Wegen weiterer Ausführungen und Anwendungen verweise ich auf meine oben zitierte Arbeit.

²⁾ Die Heranziehung des Hilbertschen Satzes gestattet den letzten Teil des Beweises ganz besonders abzukürzen. Diesen Teil der neuen Beweisordnung habe ich bereits vor längerer Zeit gefunden und auch bereits damals (Sommer 1917) Fri. E. Noether mitgeteilt.

(Angenommen September 1919.)

Zur Reihenentwicklung in der Formentheorie.

(Zusatz und Berichtigung zu Nr. III der Arbeit „Über ganze rationale Darstellung der Invarianten eines Systems von beliebig vielen Grundformen“, Math. Ann. 77, S. 93.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Unter „Reihenentwicklung der Formentheorie“ versteht man bekanntlich einerseits die Verallgemeinerung der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung — d. h. der Entwicklung einer zwei binäre Reihen enthaltenden Form nach Potenzen der Determinante dieser Reihen, wobei die Koeffizienten Polaren von Formen von nur einer Variablenreihe sind, oder, was damit identisch ist, bei Anwendung des Ω -Prozesses verschwinden — auf Formen von beliebig vielen Serien von je n Variablen; andererseits als Verallgemeinerung der bei „Komplexkoordinaten“ t_{ik} auftretenden Normalformen eine Entwicklung nach Normalformen für Formen, die die Größen verschiedener Stufen $t_i, t_{ik}, t_{ikl} \dots$ gleichzeitig enthalten. Diese zweite Art der Entwicklung läßt sich aber aus der ersten durch invariante Differenzierungsprozesse gewinnen, wie dies vor allem Mertens und Deruyts ausgeführt haben¹⁾.

Die verschiedenen Entwicklungen erster Art ergeben sich alle — wie dies etwa Math. Ann. 77 a. a. O. III kurz skizziert — als Folgerung der Entwicklung einer Form von n Reihen von je n Variablen nach Potenzen der Determinante dieser Reihen, wobei die Koeffizienten *Polaren von Formen von nur $(n-1)$ Reihen sind, die selbst aus der Ausgangsform durch*

¹⁾ F. Mertens, Über invariante Gebilde quaternärer Formen (Sitzber. d. Ak. d. Wiss. Wien 98, Abt. IIa (1889)) für den quaternären Fall. Die allgemeinen Normalformen finden sich bei J. Deruyts: Sur la réduction des fonctions invariantes dans le système des variables géométriques, Bulletins de l'Ac. R. de Belgique 24 (1892). Ohne Kenntnis dieser Arbeit habe ich in genauer Anlehnung an Mertens die allgemeine Entwicklung nach Normalformen angegeben in § 7 der Arbeit: Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen, J. f. M. 139 (1910).

*Polarenbildung und Ω -Prozeß abgeleitet sind*³⁾. Die ursprüngliche Clebsch-Gordansche Entwicklung ($n=2$) war noch einen Schritt weiter gegangen; die speziellen auftretenden Polarprozesse sind dort *explizite* angegeben, sogar unter Einschluß der numerischen Koeffizienten.

Was ich nun der angegebenen Note — wo die Reihenentwicklung mehr begrifflich, als ein Problem der linearen Formenscharen aufgefaßt ist — zufügen möchte, ist eine bis auf Zahlenkoeffizienten *explizite Darstellung*, die sich durch Spezialisierung der auf allgemeine Modulsysteme bezüglichen Untersuchungen von E. Fischer⁴⁾ ergibt.

Zu dieser Einordnung führt die Deutung der Normalform in den t_{ik} . Ersetzt man nämlich die „Komplexe koordinaten“ t_{ik} durch die „Linienkoordinaten“ $p_{ik} = (x_i y_k - x_k y_i)$, so ist vermöge der zwischen den p_{ik} bestehenden identischen Relationen die Darstellung einer Form $F(p_{ik})$ nicht mehr eindeutig. Eindeutigkeit läßt sich erzielen, wenn man verlangt, daß zwischen den Koeffizienten von F *dieselben* linearen Relationen bestehen wie zwischen den in F auftretenden Potenzprodukten der p_{ik} ⁴⁾. Für diese Normalform Φ gilt also:

$$[1] \quad \begin{aligned} F(p_{ik}) &= \Phi(p_{ik}) \quad [\text{identisch in } x, y], \quad \text{oder} \\ F(t_{ik}) &\equiv \Phi(t_{ik}) \quad \text{mod } M, \end{aligned}$$

wo M den Modul aller identischen Relationen zwischen den p_{ik} bedeutet, d. h. aus der Gesamtheit aller Formen $G(t_{ik})$ besteht, für die $G(p_{ik})$ identisch in x, y verschwindet. $\Phi(t_{ik})$ ist die „Normalform“ in Komplexkoordinaten, während die Basisfunktionen von M quadratische Formen in den t_{ik} werden. Durch Iteration des Verfahrens in bezug auf die Faktoren dieser Basisfunktionen entsteht die vollständige Reihenentwicklung. Entsprechende Überlegungen gelten bei gleichzeitigem Auftreten der $t_i, t_{ik}, t_{ikh}, \dots$

Auf einen analogen Gedankengang läßt sich die Entwicklung nach Polaren zurückführen. Ersetzt man nämlich etwa in einer Form $F(x, y, z)$ die drei ternären Reihen $x = (x_1, x_2, x_3)$, y, z durch solche Reihen ξ, η, ζ , die sich *linear* aus nur zwei zusammensetzen lassen (etwa $\xi = x, \eta = y; \zeta = \lambda_1 x + \lambda_2 y$), so wird die Darstellung von $F(\xi, \eta, \zeta)$ wieder nicht eindeutig. Man kann wieder für die Koeffizienten dieselben

³⁾ Vgl. die Literaturangaben a. a. O. Seitdem erschienen und auch auf der formalen Methode beruhend: Schouten, Over reeksontwikkelingen van algebraische vormen met verschillende rijen van variabelen van verschillende graad, Verslag Ak. Amsterdam 27 (1919), S. 1481.

⁴⁾ E. Fischer, Über die Differentiationsprozesse der Algebra, J. f. M. 148 (1917).

⁴⁾ Vgl. Clebsch, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, § 4, Abh. d. K. G. d. Wissensch. zu Göttingen 17 (1872).

linearen Relationen vorschreiben, wie für die in F auftretenden Potenzprodukte der ξ, η, ζ . Da nun hier der Modul M aller identischen Relationen als Basisfunktion die Determinante $\Delta = (xyz)$ der drei Reihen besitzt (a. a. O. III, Hilfssatz a)), so tritt hier an Stelle von [1]:

$$[2] \quad \begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) &= \Phi(\xi, \eta, \zeta) \quad [\text{identisch in } x, y], \quad \text{oder} \\ F(x, y, z) &\equiv \Phi(x, y, z) \quad \text{mod } \Delta. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß Φ durch Polarenbildung entsteht (vgl. Formel (2) a. a. O.); die vollständige Reihenentwicklung ergibt sich wieder durch Iteration.

Die Bildung der Normalformen Φ ordnet sich also beidemale folgendem Problem unter: Ersetzt man in $F(z)$ die Unbestimmten z_i durch Polynome $f_i(\xi)$ von Parametern ξ , so daß also die Darstellung $F(f_i(\xi))$ nicht mehr eindeutig wird, so soll die Eindeutigkeit dadurch festgelegt werden, daß zwischen den Koeffizienten dieselben linearen Relationen bestehen wie zwischen den in F auftretenden Potenzprodukten der $f_i(\xi)$. Es wird also

$$[3] \quad \begin{aligned} F(f_i(\xi)) &= \Phi(f_i(\xi)) \quad [\text{identisch in } \xi], \quad \text{oder} \\ F(z) &\equiv \Phi(z) \quad \text{mod } M, \end{aligned}$$

wo M den Modul aller identischen Relationen zwischen den $f_i(\xi)$ bedeutet.

Für diese Normalform $\Phi(z)$ hat nun E. Fischer in § 11, I seiner zitierten Arbeit eine bis auf Zahlkoeffizienten *explizite* Entwicklung, und zwar vermöge linearer Operationen angegeben. Zugleich hat er aber auch in der Einleitung III und in § 6 II für die zu M gehörige Differenz $F - \Phi$ — unter Voraussetzung der Kenntnis einer Modulbasis — einen im selben Sinn expliziten Ausdruck angegeben; und in Verbindung dieser Entwicklungen in § 11 II die Formel [3] somit durch eine explizite Darstellung ersetzt. Dabei ist die noch offene Frage nach den Zahlkoeffizienten nach § 12 derselben Arbeit identisch mit dem Aufsuchen der Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Operationen (Formel 82).

Ich spezialisiere nun in 1. die Fischerschen Formeln auf den Fall der Reihenentwicklung nach Polaren und gewinne daraus durch Iteration die Reihenentwicklung. Die Operation zur Bestimmung von Φ geht dabei in *bestimmte* Polarprozesse über, was erheblich genauer ist als die oben angegebene, bisher bekannte Fassung. Bei der Operation zur Bestimmung von $F - \Phi$ tritt die Multiplikation mit der Determinante Δ und der Ω -Prozeß gemischt auf. Um auf die gewöhnliche, nicht explizite Form zu kommen, ist noch die Bemerkung zu machen, daß $\Omega\Delta$ sich durch Polarprozesse ausdrücken läßt.

An dieser Stelle sei noch eine Berichtigung zugefügt. Ich habe a. a. O. (S. 101, Z. 6 v. o.) versehentlich die nur im binären Gebiet geltende iden-

tische Umformung — $\Omega(\Delta\psi) = c_1\psi + c_2\Delta \cdot \Omega(\psi)$ — als allgemeingültig angenommen und damit den Übergang von der Fundamentalformel (2), die den Ausdruck für die Normalform Φ in [2] gibt, auf die Reihenentwicklung (3) gemacht. Die dortigen Überlegungen ergeben also nur die Formel (2), und als Spezialfall davon den Reduktionssatz (1); reichen aber, da ein expliziter Ausdruck für die Differenz $F - \Phi$ fehlt, zur Begründung der Reihenentwicklung nicht aus.

In 2. erhalte ich ebenso durch Spezialisierung die Normalform $\Phi(t_{ik})$ von [1]; allgemeiner die Normalform $\Phi(t_i, t_{ik}, t_{kl}, \dots)$, was auf bekannte explizite Formeln führt. Da aber die Aufstellung der vollständigen Reihenentwicklung die Kenntnis einer Modulbasis von M verlangt, ist hier der invariantentheoretische Weg (vgl. die angeführte Literatur) vorzuziehen, der diese Kenntnis nicht verlangt, sondern im Gegenteil vermöge der Reihenentwicklung eine Modulbasis liefert.

1. Nach Fischer, § 11 (Formel (19) und folgende Zeilen) wird die Normalform $\Phi(z)$ von [3] — (dort $N(\zeta)$) — gegeben durch:

$$[4] \quad \Phi(z) = (a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_r S^r) F(z),$$

wo die Konstanten $a_1 \dots a_r$ dem Koeffizientenbereich der $f(\xi)$ angehören und nur vom Grade von $F(z)$ abhängen; der Operator S ist definiert durch

$$[5] \quad S = AB; \quad BF(z) = F(f(\xi)); \quad AF(f(\xi)) = \left\{ \sum z_i f_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \right\}^p F(f(\xi))^{\frac{p}{p-1}}.$$

Faßt man in [2] F als Form p -ter Dimension in z allein auf, so spezialisiert sich $f_i(\xi)$ zu $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i$; somit kommt:

$$BF = F(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y); \quad SF = \left\{ \sum z_i \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \right\}^p F(x, y, \lambda_1 x + \lambda_2 y),$$

oder in Polarprozessen geschrieben (vgl. a. a. O. II, 2. u. 3.; auch für die abkürzende Bezeichnung):

$$[6] \quad SF(x, y, z) = \frac{1}{p!} \left[z \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^p \left[(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \frac{\partial}{\partial z} \right]^p F(x, y, z),$$

Durch [4] und [6] ist der gewünschte explizite Ausdruck für $\Phi(x, y, z)$ gegeben; $\Phi(x, y, z)$ ordnet sich zugleich der am Anfang erwähnten allgemeinen Form (ΣPH in (2), a. a. O.) — Polaren von Ausdrücken, die nur von 2 Reihen abhängen und aus F durch Polarprozesse gewonnen werden — unter. Die noch unbestimmten Koeffizienten a_i sind rationale Zahlen; da hier die $f_i(\xi)$ ganzrationale Zahlkoeffizienten besitzen. Schreibt man [2] in der Form:

$$[2a] \quad F = \Phi + \Delta F_1,$$

⁵⁾ Vgl. Formel (75). Im Falle von [3] läuft die Summe α über alle Potenzprodukte p -ter Dimensionen, und (75) spezialisiert sich daher zu [5].

so kommt durch Spezialisierung der bei Fischer in der Einleitung III und in § 6 II (S. 41) angegebenen Formel

$$[7] \quad F_1 = (\alpha_1 \Omega + \alpha_2 \Omega \Delta \Omega + \dots + \alpha_i \Omega \Delta \Omega \dots \Delta \Omega) F^0 \quad \left[\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right],$$

wo wieder die α_i rationale, nur vom Grad von F abhängende Zahlen sind.

Die Iteration führt zu:

$$F_1 = \Phi_1 + \Delta F_2; F_2 = \Phi_2 + \Delta F_3; \dots; F_i = \Phi_i + \Delta F_{i+1}; \dots,$$

wo jeweils die Φ_i die den F_i entsprechenden Normalformen sind. Da die F_i in z vom Grade $(p-i)$ sind, kommt nach [4] und [6]:

$$[8] \quad \Phi_i = (a_{i1} S_i + a_{i2} S_i^2 + \dots) F_i;$$

$$S_i F_i = \frac{1}{(p-i)!} \left[z \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^{p-i} \left[(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \frac{\partial}{\partial z} \right]^{p-i} F_i.$$

Der Formel [7] entspricht:

$$F_i = (\alpha_{i1} \Omega + \alpha_{i2} \Omega \Delta \Omega + \dots) F_{i-1}, \text{ und durch Iteration}$$

$$[9] \quad = (\beta_1 \Omega^i + \beta_2 \Omega^i \Delta \Omega + \dots + \beta_e \Omega^k \Delta \Omega^k \dots \Delta \Omega^{k-1} + \dots) F$$

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_l - i + 1 = i).$$

Vermöge [8] und [9] ist in der Reihenentwicklung

$$F = \Phi + \Delta \Phi_1 + \Delta^2 \Phi_2 + \dots + \Delta^i \Phi_i + \dots \Delta^p \Phi_p$$

die im angegebenen Sinn explizite Darstellung erreicht.

Wendet man auf [7] die identische Umformung: $-\Omega \Delta F = P F -$ an, wo P Polarprozesse bedeuten⁷⁾, so kommt, wegen der Vertauschbarkeit dieser Prozesse mit dem Ω -Prozeß, die bekannte Formel:

$$F_1 = P \Omega F; \dots; F_i = P \Omega^i F,$$

und daraus folgt in Verbindung mit [8] oder mit den Überlegungen a. a. O. die bekannte Fassung der Reihenentwicklung, wie etwa in (3) a. a. O. Handelt es sich um n Reihen von n Variablen, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}, z$; so wird entsprechend: $f_i(\xi) = \lambda_1 x_i^{(1)} + \lambda_2 x_i^{(2)} + \dots + \lambda_{n-1} x_i^{(n-1)}$; und ebenso ist Δ und Ω für n Reihen zu definieren.

2. Für die Normalform der $F(t_i, t_{ik}, t_{ikl}, \dots)$ sind die $f_i(\xi), f_{ik}(\xi), \dots$ gegeben durch die ein-, zwei- bis $(n-1)$ -reihigen Determinanten

$$\xi_i^{(1)}, (\xi_i^{(1)} \xi_i^{(2)})_{ik}, \dots, (\xi_i^{(1)} \xi_i^{(2)} \dots \xi_i^{(n-1)})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}.$$

⁷⁾ Diese spezialisierte Formel benutzt Kerim in seiner demnächst erscheinenden Erlanger Dissertation in der Anwendung auf „Trägheitsformen“.

⁸⁾ Vgl. etwa F. Mertens, Über ganze Funktionen von m Systemen von je n Unbestimmten, Monatsh. f. Math. u. Phys. 4, Formel (5).

Somit kommt als Spezialisierung von [5]:

$$S = AB; \quad BF = F(\xi_i^{(1)}, (\xi^{(1)} \xi^{(2)})_{ik}, \dots);$$

$$ABF = \left(\sum t_i \frac{\partial}{\partial \xi_i^{(1)}} \right)^{\lambda_1} \left(\sum t_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi^{(2)}} \right)_{ik} \right)^{\lambda_2} \dots F(\xi_i^{(1)}, (\xi^{(1)} \xi^{(2)})_{ik}, \dots),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Gradzahlen in t_i, t_{ik}, \dots bedeuten.

Aus invariantentheoretischen Überlegungen (es lassen sich nämlich alle Invarianten von F , die linear in den Koeffizienten sind, linear zusammensetzen aus F und aus Formen aus M , also insbesondere auch das nicht zu M gehörende SF)⁹⁾ folgt hier die Kongruenz: $\Phi \equiv a_1 SF \pmod{M}$, und wegen der Normalformeneigenschaft daraus anstelle von [4] die einfache Relation:

$$[10] \quad \Phi = a_1 SF = a_1 S \Phi.$$

Die zweite Gleichung gilt, da die Anwendung von S jede Form aus M zum Verschwinden bringt. Formel [10] zeigt, daß die Normalform Φ selbst zugleich Eigenfunktion ist; und zwar gibt es nach der obigen Invariantenüberlegung keine weiteren Eigenfunktionen, die zugleich Invarianten von F sind (vgl. zu [10] Deruyts, Formel (10) und (10')).

⁹⁾ Dies folgt etwa aus § 6 und § 7, 2. meiner zitierten Arbeit „Zur Invariantentheorie der Formen von n Variablen“.

Berichtigungen.

1. In der Arbeit „Die allgemeinsten Bereiche aus ganzen transzendenten Zahlen“ (Math. Ann. 77) ist Seite 121, Zeile 8 von oben, Z. 9 v. o. und Z. 11 v. u. der Körper (H, Y) zu ersetzen durch den „Körper $(H, Y, Y', \dots, Y^{(\lambda_0-1)})$, wo $Y', \dots, Y^{(\lambda_0-1)}$ die Konjugierten von Y in bezug auf H bedeuten.“ Entsprechend ist S. 120, Z. 5 v. o. u. S. 121, Z. 9 von o. (H, y) zu ersetzen durch $(H, y, y', \dots, y^{(\lambda_0-1)})$.

2. In der Arbeit „Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe“ (Math. Ann. 78) muß es bei der Formulierung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes — S. 222, Z. 3 v. u. — anstatt „Zahlkörper Ω “ genauer heißen: „endlicher algebraischer Zahlkörper Ω “, worauf mich Herr Ostrowski aufmerksam macht. In der Tat ist ja etwa in bezug auf den Körper aller algebraischen Zahlen die Gruppe jeder Gleichung mit algebraischen Zahlkoeffizienten die identische. — Entsprechend ist in der Einleitung unter „beliebiger Rationalitätsbereich“ zu verstehen ein endlicher algebraischer Zahlkörper, dem noch endlich viele Parameter adjungiert werden können, oder einer der so entstehenden Zwischenkörper.

(Angenommen September 1919.)

Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs¹⁾.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. Es sei $z = x + iy$ eine komplexe Veränderliche und

$$S(z) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

eine beliebige formale Potenzreihe, von der nur vorausgesetzt werde, daß die aus ihren Koeffizienten c_r gebildeten Hankelschen Determinanten

$$C_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

für alle m von Null verschieden sind. Über die Konvergenzeigenschaften von $S(z)$ werden hier keine weiteren Annahmen gemacht, so daß also auch solche Reihen $S(z)$ in den Kreis unserer Betrachtungen einbezogen werden, die für jeden noch so großen Wert des absoluten Betrages von z divergent sind.

Nach bekannten Sätzen läßt sich dann durch einen formalen Divisionsprozeß die Reihe $S(z)$ in einen Kettenbruch

$$(1) \quad K(z) = \frac{\alpha_1}{z + \beta_1} + \frac{\alpha_2}{z + \beta_2} + \frac{\alpha_3}{z + \beta_3} + \dots$$

¹⁾ Den in dieser Arbeit veröffentlichten Satz habe ich im Frühjahr 1916 gefunden. Durch militärische Verpflichtungen gehindert, konnte ich das Manuskript erst im März 1917 fertigstellen und sandte es dann bald darauf an die Redaktion des Journals für reine und angewandte Mathematik, die die Arbeit annahm. Im Februar 1919 habe ich das Manuskript zurückerbeten, da ich erkannt hatte, daß sich mein ursprünglicher Beweis wesentlich vereinfachen ließ.

entwickeln²⁾, den wir mit Herrn Perron mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziiert nennen wollen. Seine Koeffizienten α_r sind reelle von Null verschiedene Zahlen, seine Koeffizienten β_r beliebige reelle Zahlen.

Der n -te Näherungsbruch $K_n(z)$ des Kettenbruchs $K(z)$ ist, wie sich aus den Rekursionsformeln für Kettenbrüche unmittelbar ergibt, gleich dem Quotienten zweier Polynome

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)},$$

wobei $U_n(z)$ vom Grade $n-1$, $V_n(z)$ vom Grade n ist; außerdem ist in $V_n(z)$ der Koeffizient des Gliedes z^n gleich 1.

Offenbar läßt sich $K_n(z)$ für hinreichend große Werte von $|z|$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$K_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}^{(n)}}{z^{\nu+1}}.$$

Nunmehr zeigt sich der Zusammenhang zwischen der Potenzreihe und dem mit ihr assoziierten Kettenbruch darin, daß die $2n$ ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $K_n(z)$ mit den entsprechenden Koeffizienten von $S(z)$ übereinstimmen, daß also die Beziehungen bestehen³⁾

$$(2) \quad c_{\nu}^{(n)} = c_{\nu} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Durch den Grad der Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ und durch die Beziehungen (2) ist die rationale Funktion $K_n(z)$ eindeutig bestimmt.

Die Bedingung $C_m \neq 0$ für $m = 0, 1, \dots, n-1$ erweist sich ferner nicht nur als hinreichend, sondern auch als notwendig dafür, daß eine Funktion $K_n(z)$ von den verlangten Eigenschaften existiert. Dieses Resultat läßt sich auch in dem Satze formulieren: Damit der mit einer Potenzreihe $S(z)$ assoziierte unendliche Kettenbruch $K(z)$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß die aus den Koeffizienten c , der Potenzreihe gebildeten Determinanten C_m für alle Werte von m von Null verschieden sind³⁾.

Umgekehrt läßt sich zu jedem Kettenbruch $K(z)$ der Form (1) eine mit ihm assoziierte Potenzreihe $S(z)$ finden, deren Koeffizienten zu den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $K_n(z)$ in den durch Formel (2) angegebenen Beziehungen stehen³⁾.

²⁾ O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, im folgenden kurz mit Perron, Lehrbuch zitiert. Leipzig 1913. S. 322–326 und S. 376. Siehe auch J. Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Dissertation Göttingen 1914, abgedruckt im Journal für reine und angewandte Math. 144 (1914), S. 114–165, im folgenden kurz mit Grommer, Dissertation zitiert. Vgl. insbesondere S. 118–123.

³⁾ I. c. Anm. ²⁾.

2. Besonderes Interesse verdienen diejenigen Kettenbrüche, deren Koeffizienten α_r sämtlich negative Zahlen sind mit Ausnahme von α_1 , das größer als Null ist. Sie sind mit solchen Potenzreihen $S(z)$ assoziiert, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind. Aus der Bedingung $C_m > 0$ für alle m folgt leicht $c_{2r} > 0$, während die Koeffizienten c_{2r+1} positiv oder negativ oder auch gleich Null sein können.

Die Bedingung $C_m > 0$ für alle m ist notwendig und hinreichend dafür, daß $\alpha_1 > 0$, $\alpha_r < 0$ für $r \geq 2$ wird. Im folgenden sollen nur Kettenbrüche $K(z)$ mit dieser Koeffizienteneigenschaft betrachtet werden.

Ihre wichtigste Eigenschaft zeigt sich bei der Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche $K_n(z)$ ⁴⁾. Es ergibt sich nämlich

$$K_n(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{M_\nu^{(n)}}{z - \lambda_\nu^{(n)}}.$$

Hierbei sind die $\lambda_\nu^{(n)}$, die Nullstellen des Polynoms $V_n(z)$, sämtlich reell und voneinander verschieden, die Residuen von $K_n(z)$

$$M_\nu^{(n)} = \frac{U_n(\lambda_\nu^{(n)})}{V_n'(\lambda_\nu^{(n)})}$$

sämtlich positiv.

3. In seiner Arbeit über ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen untersucht Herr Grommer Kettenbrüche der eben beschriebenen Art, die mit für $|z| > \varrho$ konvergenten Potenzreihen assoziiert sind, und beweist dort den Satz⁵⁾:

Ist der Kettenbruch $K(z)$ mit einer Potenzreihe $S(z)$ assoziiert, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind und die für $|z| > \varrho$ konvergiert, so konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, dem kein Punkt der reellen Achse, der zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$ gelegen ist, angehört, und stellt dort dieselbe analytische Funktion $f(z)$ wie, für $|z| > \varrho$, die Potenzreihe $S(z)$ dar.

4. In der vorliegenden Arbeit soll ein etwas allgemeinerer Satz derselben Art bewiesen werden, indem die Voraussetzung, daß die Potenzreihe $S(z)$ einen Konvergenzkreis besitzt, abgeändert wird. Der zu beweisende Satz lautet:

Es sei eine formale Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind. Außerdem mögen zwei Konstanten

⁴⁾ Vgl. etwa Grommer, Diss. S. 123–125.

⁵⁾ Diss. Kap. I, S. 129–134.

ϱ und k von der Beschaffenheit existieren, daß die Koeffizienten c_ν der Potenzreihe $S(z)$ sich durch die Beziehung

$$(3) \quad |c_\nu| \leq \frac{k}{\varrho^\nu} \nu!$$

abschätzen lassen.

Dann konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält.

Durch den Kettenbruch $K(z)$ wird also in der Halbebene mit positivem Imaginärteil eine analytische Funktion $f(z)$, in der Halbebene mit negativem Imaginärteil eine analytische Funktion $f^*(z)$ definiert, und zwar ist

$$f^*(x - iy) = \bar{f}(x + iy),$$

wenn \bar{f} den zu f konjugiert komplexen Wert bezeichnet. Die Funktion $f^*(z)$ wird aber im allgemeinsten Falle nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$ sein, da z. B. die Funktion $f(z)$ die Achse der reellen Zahlen als natürliche Grenze haben kann.

Für die Funktion $f(z)$ wird außerdem die Integraldarstellung

$$(4) \quad f(z) = \int_0^{-i\infty} v(t) e^{-tz} dt = -i \int_0^\infty v(-i\tau) e^{i\tau z} d\tau$$

gefunden, wobei $v(t)$ sich in die wegen (3) für $|t| < \varrho$ konvergente Potenzreihe

$$v(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} t^\nu$$

entwickeln läßt. Das heißt aber nichts anderes, als daß sich die Funktion $f(z)$ auch durch Borelsche Summation aus der Potenzreihe $S(z)$ ergibt; da außerdem das Integral rechter Hand von (4) sich für $y \geq \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, als absolut und gleichmäßig konvergent erweist, so ist die im allgemeinen divergente Potenzreihe $S(z)$ im Borelschen Sinne sogar absolut summierbar.

Aus der Integraldarstellung (4) folgt ferner nach bekannten Sätzen von Poincaré*) und Herrn Borel, daß die Funktion $f(z)$ im Winkelraum $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ durch die Potenzreihe $S(z)$ im Poincaréschen Sinne asymptotisch dargestellt wird.

5. Der Beweis des Konvergenzsatzes beruht im wesentlichen auf einem funktionentheoretischen Hilfssatze, der auch für sich selbst von Interesse erscheint:

*) H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta Math. 8 (1886), S. 295–344. Vgl. insbesondere S. 295–296 und S. 307–312.

Ist $t = \sigma + i\tau$ eine komplexe Veränderliche und ist

$$v(t) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v t^v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} t^v$$

eine für $|t| < \varrho$ konvergente Potenzreihe, sind endlich die Koeffizienten-determinanten

$$(5) \quad \begin{vmatrix} b_0 & , & 1! b_1 & , & \dots & , & (m-1)! b_{m-1} \\ 1! b_1 & , & 2! b_2 & , & \dots & , & m! b_m \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ (m-1)! b_{m-1} & , & m! b_m & , & \dots & , & (2m-2)! b_{2m-2} \end{vmatrix} = C_m$$

sämtlich positiv, so läßt sich die Funktion $v(t)$ im ganzen Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ fortsetzen und bleibt dort unterhalb einer festen, von t unabhängigen Schranke.

Der Beweis dieses Satzes wird in § 2 geführt und enthält den wesentlichen mathematischen Gedanken der Arbeit.

Im § 3 wird der Beweis der Konvergenz des Kettenbruchs zu Ende geführt, der nun keine Schwierigkeiten mehr macht.

Im § 4 endlich werden für die Funktion $f(z)$ noch Darstellungen durch Stieltjessche Integrale und durch Fakultätenreihen kurz angegeben.

6. Die in den ersten drei Paragraphen ausgeführten Beweise tragen elementaren Charakter und benutzen vor allen Dingen nicht die Darstellung der Koeffizienten c_v durch Stieltjessche Integrale:

$$(6) \quad c_v = \int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\Phi(u).$$

Die Existenz einer solchen Darstellung ist unter Benutzung des Grommerschen Auswahltheorems⁷⁾, das das Differential $d\Phi(u)$ liefert, in dem allgemeinen Falle, der hier in Frage kommt, vom Verfasser zum ersten Male nachgewiesen worden, welcher unter Benutzung dieser Darstellung die Konvergenz des Kettenbruchs $K(z)$ auch an anderer Stelle bewiesen hat⁸⁾. Ebenda sind die Resultate anderer Arbeiten⁹⁾ über denselben Gegenstand angeführt, die auch von der Integraldarstellung (6) der Koeffizienten c_v Gebrauch machen.

⁷⁾ Diss. Kap. III, S. 134–145.

⁸⁾ H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 186–222; vgl. insbesondere § 5 S. 212–218.

⁹⁾ O. Perron, Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 74 (1913), S. 545–554. — O. Szász, Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 76 (1915), S. 301–314.

Der funktionentheoretische Satz über die Fortsetzbarkeit der analytischen Funktion $\varphi(z)$ ist unter Benutzung der Integraldarstellung (6) vom Verfasser gleichfalls an anderer Stelle¹⁰⁾ bewiesen und als eine Art von Umkehrung mit einem Satze von Herrn Pólya¹¹⁾ über die Funktionen $\frac{1}{g(z)}$, wo $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion mit nur reellen Nullstellen vom Geschlechte 0 oder 1 bezeichnet, in Zusammenhang gebracht worden. Doch glaube ich, daß trotzdem die hier ausgeführten elementaren Betrachtungen einiges Interesse verdienen.

§ 1.

Es sei eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizientendeterminanten C_n sämtlich positiv sind und deren Koeffizienten c_r der Ungleichheitsbeziehung (3) genügen.

Wie in der Einleitung auseinandergesetzt wurde, existiert dann der mit $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$, und zwar wird $\alpha_1 > 0$, $\alpha_r < 0$ für $r \geq 2$.

Für seinen Näherungsbruch n -ter Ordnung $K_n(z)$ erhält man die Darstellungen

$$(7) \quad K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \sum_{n=1}^n \frac{M_n^{(n)}}{z - \lambda_n^{(n)}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(n)}}{z^{r+1}},$$

wobei für die Koeffizienten $c_r^{(n)}$ die fundamentalen Beziehungen (2) gelten.

Die Partialbruchzerlegung für $K_n(z)$ wollen wir jetzt in anderer Form schreiben, indem wir $\frac{1}{z - \lambda_n^{(n)}}$ durch das für $y \geq \delta$ absolut und gleichmäßig konvergente Integral $\int_0^{-iy} e^{-t(z - \lambda_n^{(n)})} dt$ ersetzen. Es ergibt sich so

$$(8) \quad K_n(z) = \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} \int_0^{-iy} e^{-t(z - \lambda_n^{(n)})} dt = \int_0^{-iy} v_n(t) e^{-tz} dt,$$

wenn

$$(9) \quad v_n(t) = \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} e^{\lambda_n^{(n)} t}$$

gesetzt wird.

¹⁰⁾ H. Hamburger, Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Pólya; wird in der Math. Zeitschr. erscheinen.

¹¹⁾ G. Pólya, Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte 0 und 1, Journal für reine und angew. Math. 145 (1915), S. 224–249, vgl. insbes. S. 235–237.

Da $v_n(t)$ eine ganze transzendente Funktion ist, läßt sich $v(t)$ an der Stelle $t=0$ in eine Potenzreihe

$$v_n(t) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v^{(n)} t^v$$

entwickeln, und zwar erhält man wegen (9)

$$b_v^{(n)} = \frac{1}{v!} \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^v.$$

Aus (7) folgt aber andererseits

$$(10) \quad \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^v = c_v^{(n)},$$

also

$$b_v^{(n)} = \frac{c_v^{(n)}}{v!}.$$

Wir beweisen zunächst, daß für $|t| \leq \varrho - \delta$, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, die Funktionen $v_n(t)$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen die Funktion

$$(11) \quad v(t) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v t^v = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c_v}{v!} t^v$$

konvergieren. Daß die Potenzreihe (11) für $|t| < \varrho$ konvergiert, folgt unmittelbar aus der Abschätzung (3) für $|c_v|$.

Gelegentlich des Beweises seines in der Einleitung zitierten Konvergenzsatzes zeigt Herr Grommer, daß

$$c_{2v}^{(n)} \leq c_{2v},$$

ist für alle n und alle v . Der Nachweis dieser Ungleichheitsbeziehung, den wir der Vollständigkeit halber hier kurz skizzieren wollen, stützt sich auf einen Hilfssatz, der in größerer Allgemeinheit von Laguerre¹²⁾ formuliert worden ist, und für den in der hier erforderlichen speziellen Fassung Herr Grommer einen einfachen algebraischen Beweis angibt. Der Satz lautet:

Es sei $P(z)$ ein Polynom m -ten Grades mit nur reellen Nullstellen. Außerdem sei der Koeffizient des Gliedes z^m gleich 1. Entwickelt man $\frac{1}{P(z)}$ in die Potenzreihe

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m+1}} + \frac{a_2}{z^{m+2}} + \dots,$$

so sind alle Koeffizienten $a_{2v} > 0$.

¹²⁾ Laguerre, Œuvres, Bd. I, S. 169; Grommer, Diss., S. 180–182.

Aus diesem Hilfssatz folgt Herr Grommer die Beziehung $c_{2r}^{(n)} \leq c_{2r}$, indem er von der Fundamentalformel für Kettenbrüche¹³⁾

$$(12) \quad \frac{U_{n+1}(z)}{V_{n+1}(z)} = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}{V_{n+1}(z) V_n(z)}$$

Gebrauch macht. Entwickelt man nämlich $\frac{1}{V_{n+1}(z) V_n(z)}$ in eine Potenzreihe $\frac{1}{z^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{z^{r+1}}$, so ist $a_2 > 0$, da das Polynom $V_{n+1}(z) V_n(z)$ allen Voraussetzungen des Laguerreschen Hilfssatzes genügt. Andererseits folgt aber aus (12), indem man die Potenzreihenentwicklung (7) der Näherungsbrüche $K_n(z)$ berücksichtigt,

$$c_{2r}^{(n+1)} - c_{2r}^{(n)} = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1} a_{2r-2n}$$

für $r \geq n$; also, da außerdem $\alpha_1 > 0$, $-\alpha_2 > 0$, ..., $-\alpha_{n+1} > 0$ ist,

$$c_{2r}^{(n+1)} - c_{2r}^{(n)} > 0 \quad \text{für } r \geq n.$$

Nun ist aber nach Formel (2) der Einleitung

$$c_{2r}^{(n+m)} = c_{2r} \quad \text{für } n+m \geq r+1,$$

also, mit Rücksicht auf die Abschätzung (3)

$$(13) \quad c_{2r}^{(n)} \leq c_{2r}^{(n+1)} \leq \dots \leq c_{2r}^{(n+m)} \leq c_{2r} \leq \frac{k}{2^r} (2r)!,$$

wie behauptet wurde.

Aus der Summendarstellung (10) für die Koeffizienten $c_r^{(n)}$ folgt ferner, daß die quadratische Form

$$c_{2r}^{(n)} x_0^2 + 2c_{2r+1}^{(n)} x_0 x_1 + c_{2r+2}^{(n)} x_1^2 = \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} \left(x_0 (\lambda_n^{(n)})^r + x_1 (\lambda_n^{(n)})^{r+1} \right)^2$$

positiv definit, und damit ihre Determinante

$$c_{2r}^{(n)} c_{2r+2}^{(n)} - (c_{2r+1}^{(n)})^2 > 0$$

ist. Dies ergibt aber für $c_{2r+1}^{(n)}$ die Abschätzung

$$(14) \quad |c_{2r+1}^{(n)}| \leq \sqrt{c_{2r}^{(n)} c_{2r+2}^{(n)}} \leq \sqrt{c_{2r} c_{2r+2}} \leq k \sqrt{1 + \frac{1}{2^{r+1}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1} (2r+1)! \leq k\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1} (2r+1)!,$$

wenn man die Abschätzung (13) für die $c_{2r}^{(n)}$ berücksichtigt.

Wegen (2) wird nun aber

$$v(t) - v_n(t) = \sum_{r=2n}^{\infty} \frac{c_r - c_r^{(n)}}{r!} t^r,$$

¹³⁾ Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 16 u. 378.

also erhält man für $|t| \leq \varrho - \delta$, indem man die Abschätzungen (3), (13) und (14) benutzt,

$$|v(t) - v_n(t)| \leq \sum_{r=2n}^{\infty} \frac{|c_r| + |c_r^{(n)}|}{r!} (\varrho - \delta)^r \\ \leq k(1 + \sqrt{2}) \sum_{r=2n}^{\infty} \left(\frac{\varrho - \delta}{\varrho}\right)^r = k(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{\varrho - \delta}{\varrho}\right)^{2n} \frac{\varrho}{\delta}.$$

Diese Differenz kann aber, indem man n nur groß genug wählt, unabhängig von t beliebig klein gemacht werden, und damit ist gezeigt, daß die Folge der Funktionen $v_n(t)$ mit wachsendem n für $|t| \leq \varrho - \delta$ gleichmäßig gegen $v(t)$ konvergiert.

§ 2.

Wir kommen jetzt zu dem Beweise des in der Einleitung erwähnten funktionentheoretischen Hilfssatzes; das heißt, wir wollen zeigen, daß eine beliebige für $|t| < \varrho$ konvergente Potenzreihe

$$v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{r!} t^r \quad (t = \sigma + it),$$

deren Koeffizientendeterminanten C_m [vgl. Formel (5)] sämtlich positiv sind, sich in dem ganzen Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ fortsetzen läßt.

Beweis: Da nach Voraussetzung die Potenzreihe $v(t)$ den Kreis $|t| = \varrho$ zum Konvergenzkreis besitzt, so ist nach bekannten Sätzen

$$(3') \quad |b_r| \leq \frac{k}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^r}, \quad |c_r| \leq \frac{k r!}{\left(\varrho - \frac{\delta}{4}\right)^r},$$

wo k eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Die Funktion $v(t)$ erfüllt daher die gleichen Voraussetzungen wie die Funktion (11) des § 1, nur daß die Abschätzung (3') an Stelle von (3) tritt. Es folgt daher aus den Ausführungen des vorigen Paragraphen, daß eine Folge von Funktionen

$$v_n(t) = \sum_{\kappa=1}^n M_{\kappa}^{(n)} e^{\lambda_{\kappa}^{(n)} t}$$

existiert, die für $|z| \leq \varrho - \delta$ gleichmäßig gegen $v(t)$ konvergiert. Die $\lambda_{\kappa}^{(n)}$ ergeben sich als die wegen $C_m > 0$ reellen einfachen Pole der Näherungsbrüche $K_n(z)$ des mit $S(z)$ assoziierten Kettenbruches $K(z)$, die $M_{\kappa}^{(n)}$ als die wegen $C_m > 0$ positiven Residuen von $K_n(z)$ an den Polen $z = \lambda_{\kappa}^{(n)}$.

Der Beweis unseres Hilfssatzes stützt sich auf einen oft angewandten Satz von Stieltjes über konvergente Folgen analytischer Funktionen¹⁴⁾:

¹⁴⁾ T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. de la fac. des sciences de Toulouse 8 (1894), S. 50–61.

Es sei eine unendliche Folge analytischer Funktionen $v_n(t)$ vorgelegt, die im Innern eines Bereiches Ω dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen gemeinsamen Schranke bleiben. Außerdem konvergiere in einem Teilbereiche Ω' von Ω die Folge der Funktionen $v_n(t)$ gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $v(t)$. Dann ist die analytische Funktion $v(t)$ in jedem ganz im Innern von Ω gelegenen Bereich Ω^* regulär, und die Funktionen $v_n(t)$ konvergieren in Ω^* gleichmäßig gegen die Funktion $v(t)$.

Um diesen Satz zum Beweise unseres Hilfssatzes anwenden zu können, ist nur noch nachzuweisen, daß die Funktionen $v_n(t)$ unseres Hilfssatzes in dem Bereiche $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gemeinsamen festen Schranke G bleiben. Dann folgt unser Hilfssatz unmittelbar aus dem Stieltjes'schen Satze.

Wir zeigen zunächst, daß die Funktionen $v_n(t)$ samt ihren Ableitungen $v_n^{(v)}(t)$ für rein imaginäre Werte $t = i\tau$ unterhalb einer festen Schranke bleiben, die nur von ν , aber nicht von n und τ abhängt. Wegen (9), (10), (13) und (3') erhält man

$$v_n^{(2\nu)}(i\tau) = \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^{2\nu} e^{\lambda_n^{(n)} i\tau}$$

$$(15) \quad |v_n^{(2\nu)}(i\tau)| \leq \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^{2\nu} = c_{2\nu} \leq k \frac{(2\nu)!}{(\varrho - \frac{\delta}{4})^{2\nu}},$$

da $M_n^{(n)} > 0$ ist. Ebenso findet man

$$|v_n^{(2\nu+1)}(i\tau)| \leq \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} |\lambda_n^{(n)}|^{2\nu+1},$$

aus der Schwarz'schen Ungleichheitsbeziehung und der Abschätzung (14) in Verbindung mit (3') ergibt sich endlich

$$(16) \quad |v_n^{(2\nu+1)}(i\tau)| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^{2\nu+2} \sum_{n=1}^n M_n^{(n)} (\lambda_n^{(n)})^{2\nu}}$$

$$\leq \sqrt{c_{2\nu+2} c_{2\nu}} \leq k \sqrt{2} \frac{(2\nu+1)!}{(\varrho - \frac{\delta}{4})^{2\nu+1}}.$$

Es sei jetzt $t = \sigma + i\tau$ ein beliebiger Punkt des Bereiches $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$, dann erhält man, wenn man $v_n(\sigma + i\tau)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt, auf Grund der Abschätzungen (15) und (16)

$$\begin{aligned}
 |v_n(t)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu}}{\nu!} v_n^{(\nu)}(it) \right| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\varrho - \frac{\delta}{2}\right)^{\nu}}{\nu!} |v_n^{(\nu)}(it)| \\
 &\leq k\sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho - \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right)^{\nu} = k\sqrt{2} \frac{4\varrho - \delta}{\delta}.
 \end{aligned}$$

Somit bleiben also die Funktionen $v_n(t)$ im Streifen $-\varrho + \frac{\delta}{2} \leq \sigma \leq \varrho - \frac{\delta}{2}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen von n und t unabhängigen Schranke $G = k\sqrt{2} \frac{4\varrho - \delta}{\delta}$, konvergieren also nach dem Satze von Stieltjes gleichmäßig in dem Bereiche $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$, $|\tau| \leq R$ für jedes noch so große positive R gegen die dort analytische Funktion $v(t)$.

Aus der Abschätzung

$$(17) \quad |v_n(t)| \leq G$$

folgt endlich für denselben Bereich auch

$$(18) \quad |v(t)| \leq G.$$

Damit sind alle Behauptungen des Hilfssatzes bewiesen.

Zusatz: Sind außer den aus den Koeffizienten $c_r = r!b_r$ gebildeten Determinanten C_m auch sämtliche Determinanten

$$B_m = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix} > 0,$$

so existiert, wenn wieder mit ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe (11) bezeichnet wird, die durch diese Reihe dargestellte Funktion $v(t)$ in der ganzen Halbebene $\sigma \leq \varrho - \delta$ und bleibt dort kleiner als eine feste von t unabhängige Größe.

Obgleich im folgenden von diesem Satze kein Gebrauch gemacht wird, soll hier sein Beweis kurz angegeben werden, da er an sich von Interesse erscheint.

Beweis: Wie beim vorigen Beweise gezeigt wurde, läßt sich wegen der Voraussetzung $C_m > 0$ für alle m in dem Streifen $-\varrho + \delta \leq \sigma \leq \varrho - \delta$ die Funktion $v(t)$ als Grenzwert der konvergenten Folge von Funktionen

$$v_n(t) = \sum_{\nu=1}^n M_{\nu}^{(n)} e^{i \lambda_{\nu}^{(n)} t}$$

darstellen. Nun folgt aber nach bekannten Sätzen¹⁴⁾ aus der Voraussetzung $B_m > 0$ für alle m , daß die Näherungsbrüche $K_n(z)$ des mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziierten Kettenbruches nur für positive Werte von z Pole haben können. Da ferner, wie oben gezeigt wurde, die Stellen $z = \lambda_n^{(n)}$ gerade die Pole von $K_n(z)$ sind, so ist $\lambda_n^{(n)} > 0$ für alle n und alle κ .

Man erhält also für $\sigma \leq 0$ wegen $M_n^{(n)} > 0$

$$|v_n(t)| \leq \sum_{\kappa=1}^n M_n^{(n)} e^{\sigma \lambda_n^{(n)}} \leq \sum_{\kappa=1}^n M_n^{(n)} = c_0.$$

Die $v_n(t)$ bleiben also in der ganzen Halbebene $\sigma \leq 0$ unterhalb einer festen von n und t unabhängigen Schranke, und daraus folgt die Behauptung des Zusatzes unmittelbar unter Benutzung des Stieltjesschen Satzes.

§ 3.

Der Nachweis, daß der mit der Potenzreihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ für $y \geq \delta$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$(19) \quad f(z) = \int_0^{-i\infty} v(t) e^{-tz} dt.$$

konvergiert, bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr.

Zunächst folgt aus der Abschätzung (18) für $v(t)$, die längs des gesamten Integrationsweges des Integrals (19) gilt, daß das Integral (19) für $y \geq \delta$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Andererseits war nach Formel (8)

$$K_n(z) = \int_0^{-i\infty} v_n(t) e^{-tz} dt.$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß zu den beiden vorgegebenen beliebig kleinen Zahlen ε und δ eine Zahl N von der Beschaffenheit bestimmt werden kann, daß für $y \geq \delta$ und alle $n \geq N$

$$(20) \quad |f(z) - K_n(z)| \leq \varepsilon$$

wird. Es ist

$$|f(z) - K_n(z)| \leq \int_0^{-R} |v(i\tau) - v_n(i\tau)| e^{\tau\delta} d\tau + \int_R^{-\infty} (|v(i\tau)| + |v_n(i\tau)|) e^{\tau\delta} d\tau.$$

Zunächst werde R so groß gewählt, daß

$$\int_R^{-\infty} e^{\tau\delta} d\tau = \frac{e^{-R\delta}}{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{3G}$$

¹⁴⁾ Vgl. z. B. Stieltjes, l. c. Anm.¹⁴⁾ S. 10–12, oder Perron, Lehrbuch, S. 393–396.

wird, wobei R nur von ε und δ abhängt. Dann wird auf Grund der Abschätzungen (17) und (18)

$$(21) \quad \int_{-R}^{\infty} (|v(i\tau)| + |v_n(i\tau)|) e^{\tau\delta} d\tau \leq \frac{2}{3} \varepsilon.$$

Jetzt wähle man eine hinreichend große Zahl $N = N(\varepsilon, \delta)$, die nur von ε und δ abhängt von der Beschaffenheit, daß für $0 \leq \tau \leq -R$

$$|v(i\tau) - v_n(i\tau)| \leq \frac{\varepsilon\delta}{3}$$

ist; dann erhält man

$$(22) \quad \int_0^{-R} |v(i\tau) - v_n(i\tau)| e^{\tau\delta} d\tau \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nunmehr folgt (20) für $n \geq N = N(\varepsilon, \delta)$ aus (21) und (22).

Entsprechend zeigt man, daß für $y \leq -\delta$ die Näherungsbrüche $K_n(z)$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$f^*(z) = \int_0^{iz} v(t) e^{-tz} dt$$

konvergieren.

Es ist für $y \geq \delta$, wie aus der Partialbruchzerlegung (7) für $K_n(z)$ unmittelbar hervorgeht,

$$(23) \quad K_n(x - iy) = \bar{K}_n(x + iy),$$

wenn mit $\bar{K}_n(x + iy)$ der zu $K_n(x + iy)$ konjugiert komplexe Wert bezeichnet wird. Aus (23) folgt aber

$$f^*(x - iy) = \bar{f}(x + iy).$$

Damit ist der in der Einleitung angegebene Konvergenzsatz für Kettenbrüche vollständig bewiesen.

§ 4.

Aus den Sätzen des Kap. III der Grommerschen Dissertation¹⁰⁾ folgt, daß sich $f(z)$ für $y \geq \delta$ durch ein Stieltjesches Integral

$$(24) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u}$$

darstellen läßt, wobei mit $\Phi(u)$ eine reelle, nirgends abnehmende Funktion von u bezeichnet ist.

¹⁰⁾ Dissertation S. 134–143.

Für $y < 0$ findet man wegen $f^*(x + iy) = \bar{f}(x - iy)$ gleichfalls

$$(25) \quad f^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u}.$$

Die Darstellungen (24) und (25) lassen erkennen, wann $f^*(z)$ die analytische Fortsetzung von $f(z)$ ist: nämlich dann und nur dann, wenn ein Intervall $a \leq u \leq b$ existiert, in dem $d\Phi(u)$ identisch verschwindet.

Denn in diesem Falle lassen sich die Integrale (24) bzw. (25) in der Form schreiben

$$(26) \quad \begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^a \frac{d\Phi(u)}{z-u} + \int_b^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u} && \text{für } y > 0, \\ f^*(z) &= \int_{-\infty}^a \frac{d\Phi(u)}{z-u} + \int_b^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z-u} && \text{für } y < 0. \end{aligned}$$

Da ferner die Integrale (26) in den Vertikalstreifen $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ gleichmäßig konvergieren und in diesem Gebiete reguläre analytische Funktionen darstellen, so erweist sich $f^*(z)$ als diejenige Funktion, die man erhält, wenn man $f(z)$ längs des Intervalles $a + \delta \leq x \leq b - \delta$ über die Ebene der Zahlen mit positivem Imaginärteil hinaus fortsetzt.

Die angegebene Bedingung ist aber auch notwendig dafür, daß $f(z)$ und $f^*(z)$ dieselbe analytische Funktion darstellen; denn nach einem Satz des Herrn Grommer¹⁷⁾ folgt aus

$$\lim_{y \rightarrow 0} [f(x + iy) - f^*(x - iy)] = \varphi(x) \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

daß $\Phi(u)$ in dem Intervall $a \leq u \leq b$ differentiierbar, und zwar daß

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{\varphi(x)}{2\pi i}.$$

ist.

Ist nun $f^*(x - iy)$ für $y > 0$ die analytische Fortsetzung von $f(x + iy)$ längs des Intervalles $a \leq x \leq b$, so ist in diesem Intervall $\varphi(x) = 0$, also auch $d\Phi(x) = 0$. W. z. b. w.

Zum Schlusse noch eine kurze Bemerkung über eine letzte, vierte Darstellung der Funktion $f(z)$.

Da $f(z)$ die durch Borelsche Summation der Reihe $S(z)$ gebildete

¹⁷⁾ Dissertation, S. 148–150.

Funktion ist, so läßt sie sich nach Sätzen der Herren Pincherle¹⁹⁾, Horn²⁰⁾ und Nörlund²¹⁾ in eine Fakultätenreihe entwickeln von der Form

$$(27) \quad f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(i\omega)^r a_r r!}{z(z+i\omega)(z+2i\omega)\dots(z+(r-1)i\omega)}.$$

Hierbei ist ω eine positive Konstante, die sich nach einem Satze von Herrn Nörlund²¹⁾ so bestimmen läßt, daß die Reihe (27) in der Halbebene $y \geq \delta$ gleichmäßig konvergiert.

Die a_r sind in einfacher Weise durch die c_r bestimmt; es ist nämlich

$$a_r = \sum_{n=1}^r \gamma_{rn} c_n,$$

$$c_r = \sum_{n=1}^r \Gamma_{rn} a_n.$$

Hierbei sind die γ_{rn} bzw. Γ_{rn} Konstanten, die nur von ω , aber nicht von der speziellen Wahl der c_r bzw. a_r abhängen und für die sich leicht explizite Formeln angeben lassen.

Hiermit sind für die Funktion $f(z)$ vier für $y \geq \delta$ gleichmäßig konvergente Darstellungen gefunden: erstens durch den Kettenbruch $K(z)$ der Formel (1), zweitens durch das Borelsche Integral (4), drittens durch das Stieltjessche Integral (24), viertens durch die Fakultätenreihe (27). Endlich läßt sich $f(z)$ noch durch die Potenzreihe $S(z)$ im Winkelraum $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ asymptotisch darstellen.

¹⁹⁾ Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. scient. de l'éc. norm. sup. 22 (1905), S. 1–68, vgl. insbes. S. 50–57.

²⁰⁾ J. Horn, Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 71 (1912), S. 510–532.

²¹⁾ Nörlund, Sur les séries de facultés, Acta math. 37 (1914), S. 327–387.

²²⁾ l. c. Anm.¹⁹⁾ S. 371.

Bemerkung zu der vorstehenden Abhandlung: Über die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruches von H. Hamburger in Berlin.

Von

F. Bernstein in Göttingen.

Die Resultate der vorstehenden schönen Arbeit von H. Hamburger decken sich im speziellen Fall mit den Ergebnissen der von mir im 28. Bd. des Jahresberichts der deutschen Mathematikervereinigung 1. bis 6. Heft, 1919 veröffentlichten Arbeit: *Die Übereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren, welche von T. J. Stieltjes und E. Borel herrühren*¹⁾. Das gegenseitige Verhältnis beider Arbeiten, welche in ihrer Verallgemeinerungsrichtung auseinandergehen, wird unter Benutzung der Bezeichnungen meiner Arbeit durch folgendes Schema gekennzeichnet:

I

Übereinstimmung der Summationsverfahren unter Voraussetzung von

1. $\kappa = 1$
2. $A_n > 0$.

II

Übereinstimmung der Summationsverfahren unter Voraussetzung von

1. $0 < \kappa < 2$ ²⁾
2. $A_n > 0, B_n > 0$.

¹⁾ Am Schluß meiner Arbeit befindet sich, wie mir Herr Hamburger freundlichst mitteilt, ein kleines Versehen. Dieses läßt sich aber durch folgende Bemerkung beseitigen: Die Funktionen $e^{-s^{1/\kappa} \cdot \lambda} \mathfrak{B}_n^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$ ($0 < \kappa < 2$) konvergieren gleichmäßig für sämtliche $\lambda \geq 0$ gegen $e^{-s^{1/\kappa} \cdot \lambda} F_n(\lambda)$, da die $\mathfrak{B}_n^{-1} \frac{P_n}{Q_n}$ in jedem endlichen Intervall $\lambda_0 \geq \lambda \geq 0$ gleichmäßig gegen $F_n(\lambda)$ konvergieren und überdies für alle $\lambda \geq 0$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke liegen. Damit sind die Operationen (62) bis (65) legitimiert. Übrigens ist für $\kappa = 1$ die Borelsche Schreibweise der Laplaceschen Transformation $\int_0^\infty e^{-t} F(\lambda t) dt$ von vornherein, um den Anschluß an (36) zu wahren, konsequent durch $\int_0^\infty e^{-\lambda s} F(\lambda) d\lambda$ zu ersetzen.

²⁾ Es läßt sich, wie mir Herr Hamburger nachträglich mitteilte, der Grenzfall $\kappa = 2$ durch eine einfache Transformation aus seinem Resultat ableiten.

III

der beiden Arbeiten gemeinsame Fall:

$$1. \kappa = 1$$

$$2. A_n > 0, B_n > 0.$$

I ist die Arbeit von Hamburger, II entspricht meiner Veröffentlichung. (A_n und B_n ^{a)} bedeuten die bekannten Stieltjesschen Determinanten, κ ist der Le Roysche Summationsindex.)

Beide Verallgemeinerungen haben ihr besonderes Interesse, die von Herrn Hamburger für die von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Stieltjesschen Integrale, die von mir herrührende für das in der Einleitung daselbst genannte Problem (Positivität der Fourierintegrale).

^{a)} Für A_n und B_n ist in der Hamburgerischen Arbeit C_n und B_n geschrieben.

(Angenommen 15. 4. 1920.)

Über Folgen analytischer Funktionen¹⁾.

Von

Julius Wolff in Groningen.

Das Weierstraßsche Theorem über Folgen analytischer Funktionen hat in mancher Hinsicht Verallgemeinerung gefunden. So bewies Osgood²⁾, daß eine Folge von in einem Gebiet G analytischen Funktionen gegen eine in G analytische Funktion konvergiert, wenn die Folge in jedem abgeschlossenen Teilgebiet gleichmäßig beschränkt ist und außerdem Konvergenz stattfindet in einer in G überall dichten Punktmenge. Darauf bewiesen Vitali³⁾ und Porter⁴⁾, daß es, bei der genannten Annahme über die gleichmäßige Beschränktheit, genügt, Konvergenz vorauszusetzen in einer Punktmenge, welche sich im Innern von G häuft. Carathéodory und Landau⁵⁾ entdeckten weit allgemeinere Sätze, z. B. haben sie gezeigt, daß man im Vitalischen Satze die gleichmäßige Beschränktheit durch folgendes ersetzen darf: um jeden Punkt von G kann man einen Kreis beschreiben, in dessen Innerem alle Funktionen der Folge zwei feste Werte ausschließen. Und Blaschke⁶⁾ hat den Vitalischen Satz verallgemeinert, indem er zeigte, daß es, falls G ein Kreis mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt ist, genügt, die gleichmäßige Beschränktheit der Folge in G und die Konvergenz in einer Punktfolge z_1, z_2, \dots mit $\prod_1^\infty |z_k| = 0$ vorauszusetzen.

¹⁾ Siehe die referierende Note in den Comptes Rendus vom 29. September 1919, sowie den ausführlicheren Aufsatz, der in den Amsterdamer Berichten erscheinen wird, und in welchem außer dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit eine Reihe verwandter Resultate hergeleitet wird.

²⁾ Annals of Mathematics (2) 3, Oct. 1901, S. 26.

³⁾ Annali di Matematica (3) 10, (1904), S. 65.

⁴⁾ Annals of Mathematics (2) 6, (1904–05), S. 45 u. 190.

⁵⁾ Sitz.-Ber. der K. Pr. Ak. der Wiss. 32 (1911), S. 587.

⁶⁾ Leipziger Berichte 67 (1915), S. 194.

Alle diese Theoreme liefern Folgen, die in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von G gleichmäßig konvergieren. Wie Montel⁷⁾ gezeigt hat, gibt es Folgen analytischer Funktionen, welche gegen eine analytische Funktion konvergieren, ohne dies aber in jedem abgeschlossenen Teilgebiet gleichmäßig zu tun. Die zitierten Theoreme liefern also Bedingungen, die zwar hinreichend, nicht aber notwendig sind. Bei einer konvergenten Folge von analytischen Funktionen ist die sogenannte Quasi-Uniformität der Konvergenz eine notwendige Bedingung für den analytischen Charakter der Grenzfunktion. Sie ist aber nicht hinreichend, wie Montel⁸⁾ zeigte, indem er ein Beispiel einer konvergenten Folge analytischer Funktionen konstruierte, wobei die Grenzfunktion zwar stetig, nicht aber überall analytisch ist. Sofern mir bekannt, ist bis jetzt eine notwendige und hinreichende Bedingung nicht gegeben worden. Eine solche wird im folgenden Satze ausgesprochen, welcher vielleicht noch mehrerer Transformationen fähig ist und dieser auch bedarf, wenn er eine erhebliche Einsichtvertiefung bringen soll.

Es sei $f_1(z), f_2(z), \dots$ eine Folge von Funktionen, die sich in einem Gebiet G analytisch verhalten. In jedem Punkt von G konvergiere die Folge und $f(z)$ sei die Grenzfunktion. Man betrachte die Funktionen dreier Veränderlicher

$$(1) \quad \psi_n(x, y, z) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} - \frac{f_n(y) - f_n(z)}{y - z},$$

wo die Werte x, y, z dem Gebiete G angehören. Der erste bzw. zweite Bruch ist durch $f'_n(z)$ zu ersetzen, wenn x bzw. y mit z zusammenfällt. Dann ist ψ_n eine analytische Funktion von x, y und z , und wenn man nicht gleichzeitig $x = z$ und $y \neq z$ oder $x \neq z$ und $y = z$ hat, so gilt

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x, y, z) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = \psi(x, y, z).$$

Wenn aber x, y und z alle drei zusammenfallen, so ist $\psi_n(x, y, z)$ gleich Null für jedes n , also auch

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x, y, z) = 0.$$

Ersetzt man im Falle, wo die Funktion $f(z)$ sich in G analytisch verhält, in (2) den ersten bzw. zweiten Bruch durch $f'(z)$, wenn $x = z$ bzw. $y = z$, so kommt eine analytische Funktion $\psi(x, y, z)$ zustande.

Wir behaupten nun: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(z)$ sich in G analytisch verhalte, ist die quasi-uniforme Konvergenz der Folge der $\psi_n(x, y, z)$ auf jeder beschränkten und abge-*

⁷⁾ Thèse und Bull. des Sc. Math. (2) 30.

⁸⁾ Bulletin des Sc. Math. (2) 30 (1906), S. 189.

geschlossenen Punktmenge $E(x, y, z)$, wo x, y, z Punkte von G sind und nicht gleichzeitig $x = z, y \neq z$ oder gleichzeitig $x \neq z, y = z$ stattfindet.

Die Bedingung ist notwendig. Wenn wir uns nämlich zwei beliebige positive Zahlen ε, N vorgeben und auf E einen beliebigen Punkt (x, y, z) wählen, so gibt es, wegen der Konvergenz der Folge ψ_n auf E gegen die Funktion ψ , eine natürliche Zahl $\mu > N$, für welche

$$(4) \quad |\psi_\mu(x, y, z) - \psi(x, y, z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Stetigkeit von ψ_μ und ψ gibt es eine Zahl δ , so daß

$$(5) \quad |\psi_\mu(x', y', z') - \psi(x', y', z')| < \varepsilon,$$

wenn nur $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$ und $|z - z'| < \delta$ ist. Jedem Punkt von E entspricht also eine Umgebung und eine natürliche Zahl $\mu > N$ in der Weise, daß in jedem Punkt, der E und dieser Umgebung angehört, gleichzeitig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi \quad \text{und} \quad |\psi_n - \psi| < \varepsilon$$

stattfindet.

Man kann nun E durch eine endliche Anzahl dieser Umgebungen überdecken, da ja E beschränkt und abgeschlossen ist. Hieraus folgt aber, daß man aus einer endlichen Anzahl von Indizes $> N$ in jedem Punkt von E ein μ wählen kann, wofür $|\psi_\mu - \psi| < \varepsilon$, womit die quasi-uniforme Konvergenz der Folge der ψ_n auf E gezeigt ist.

Die Bedingung ist hinreichend. Ist nämlich z ein beliebiger Punkt von G , so betrachte man in G zwei beliebige Punktfolgen $x_1, x_2, \dots, x_k \neq z, \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$ und $y_1, y_2, \dots, y_k \neq z, \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = z$. Im dreidimensionalen Raume (x, y, z) betrachte man die beschränkte und abgeschlossene Punktmenge E , welche aus den Punkten (x_k, y_k, z) und dem Häufungspunkt (z, z, z) besteht. Da auf E die Folge der ψ_n quasi-uniform gegen ψ konvergiert, so hat man

$$(6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(x_k, y_k, z) = \psi(z, z, z) = 0.$$

Gibt es nun eine Folge (x_k) in G , für welche die Zahlenfolge $\varphi(x_k) = \frac{f(x_k) - f(z)}{x_k - z}$ beschränkt ist, so kann man aus (x_k) eine Teilfolge (ξ_k) auswählen, für welche $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\xi_k)$ besteht und endlich ist. Für jede Folge (y_k) mit der einzigen Häufungsstelle z nähert sich dann, wegen (6) und wegen $\varphi(\xi_k, y_k, z) = \varphi(\xi_k) - \varphi(y_k)$, $\varphi(y_k)$ derselben Grenze, also ist f analytisch in z .

Daß aber $\varphi(x_k)$ sogar auf jeder Folge (x_k) beschränkt sein muß, erhellt wie folgt: Im entgegengesetzten Falle könnte man einen Punkt x_n ,

wählen, für den $n_2 > 1$ und $|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_1)| > 1$, ferner einen Punkt x_{n_2} , für den $n_3 > n_2$ und $|\varphi(x_{n_3}) - \varphi(x_{n_2})| > 1$, usw. Die beiden Folgen

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_{n_2}, \quad \xi_3 = x_{n_3}, \dots$$

und

$$\eta_1 = x_{n_2}, \quad \eta_2 = x_{n_3}, \quad \eta_3 = x_{n_4}, \dots$$

hätten dann z zur Häufungsstelle, und für jedes k hätte man $|\varphi(\xi_k) - \varphi(\eta_k)| = |\psi(\xi_k, \eta_k, z)| > 1$, was (6) widerspricht. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Groningen, im Oktober 1919.

(Angenommen Oktober 1919.)

Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen. II.¹⁾

Von

Hans Rademacher in Berlin.

IV. Tangentenebenen und Inhaltsmaß krummer Flächen.

10. Dem allen unseren weiteren Überlegungen zugrunde liegenden Satz I kann man noch eine wichtige geometrische Deutung geben. Es sei $f(x, y)$ eine im Gebiete G den Bedingungen jenes Satzes genügende Funktion. Durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

wird eine über G sich hinstreckende krumme Fläche S dargestellt. Ist ferner (x_0, y_0) ein Punkt totaler Differenzierbarkeit von f und sind $x(s)$ und $y(s)$ zwei differenzierbare Funktionen des Parameters s , die für $s = s_0$ die Werte $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$ annehmen (wie in § 5), so wird durch

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = f(x(s), y(s))$$

eine auf S liegende durch den Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gehende Kurve C dargestellt. Nach (32) ist dann

$$z'(s_0) = \left. \frac{df(x(s), y(s))}{ds} \right|_{s=s_0} = x'(s_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + y'(s_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Das bedeutet aber geometrisch, daß die an C in (x_0, y_0, z_0) gezogene Tangente:

$$(x - x_0) : x'(s_0) = (y - y_0) : y'(s_0) = (z - z_0) : z'(s_0)$$

für alle beliebigen C (d. h. für alle Zahlenpaare $x'(s_0)$, $y'(s_0)$) stets in der Ebene

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

¹⁾ Der erste Teil der Arbeit ist in diesen Annalen 79 (1919), S. 340–359 erschienen. Im einzelnen sind Verweisungen auf jene Abhandlung unterlassen worden, da Sätze, Formeln, Paragraphen weiternummeriert und die Bezeichnungen beibehalten sind.

der *Tangentenebene* von S in (x_0, y_0) , liegt, deren Existenz damit festgestellt ist. Da (x_0, y_0) beliebig in E^* gewählt werden darf, so gilt der

Satz VII. *Eine den Bedingungen des Satzes I genügende, a fortiori also eine der Lipschitzschen Bedingung*

$$(43) \quad \left| \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} \right| < M, \quad \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| < M$$

genügende Raumfläche

$$z = f(x, y)$$

besitzt in einem maßgleichen Kern ihres Definitionsgebietes G eine Tangentenebene.

Dieser Satz ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung des grundlegenden Lebesgueschen Satzes, daß jede der Lipschitzschen Bedingung genügende ebene Kurve $z = f(x)$ in einem maßgleichen Kern ihres Definitionsintervalls eine Tangente besitzt.

11. Dieses Ergebnis erlaubt es nun, die elementare Definition des Flächeninhaltes, wie man sie für Flächen mit *stetig* sich drehender Tangentenebene gibt, auch auf Flächen auszudehnen, die nur (43) genügen. Wir definieren:

Der Inhalt einer über dem Quadrat Q sich hinstreckenden^{*)} Fläche $z = f(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung (43) genügt, ist der Limes des Inhaltes einer Folge von Polyedern, die sich gleichfalls schlicht über Q hinstrecken, und die so beschaffen sind, daß ihre Ecken auf der Fläche liegen, daß die Polyederfolge gegen die Fläche konvergiert und daß die Neigungen der Polyederebenen gegen die Neigungen der Tangentenebenen der Fläche, wo diese existieren, konvergieren. Dabei sollen die Polyeder der Lipschitzschen Bedingung genügen, und zwar gleichmäßig, d. h. mit einer für alle geltenden Konstanten M' .

Wir zeigen, daß der so definierte Limes stets existiert, indem wir ihn berechnen. Es sei etwa

$$z = p_n(x, y)$$

die analytische Darstellung des n -ten Polyeders. Sein Flächeninhalt ist nach elementaren Überlegungen gegeben durch

$$J_n = \iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

wo $\frac{\partial p_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ in jener Nullmenge der xy -Ebene (sie besteht aus der

^{*)} Die folgenden Überlegungen ändern sich nicht, wenn statt Q ein quadrierbares Gebiet zugrunde gelegt wird.

Projektion der Kanten des Polyeders auf diese Ebene), wo die Ableitungen nicht existieren, die vorderen Derivierten bedeuten mögen. Die $p_n(x, y)$ sollen ferner der Lipschitzschen Bedingung

$$\left| \frac{p_n(x_1, y) - p_n(x_2, y)}{x_1 - x_2} \right| \leq M', \quad \left| \frac{p_n(x, y_1) - p_n(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq M'$$

oder, was auf dasselbe herauskommt,

$$(44) \quad \left| \frac{\partial p_n}{\partial x} \right| \leq M', \quad \left| \frac{\partial p_n}{\partial y} \right| \leq M'$$

genügen, wo M' eine von x, y und n unabhängige Zahl ist. In dem maßgleichen Kern E^* von Q soll gelten

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial p_n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial p_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nach einem Konvergenzsatz der Lebesgueschen Theorie ist dann, da die Integranden beschränkt bleiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial y} \right)^2} dx dy = \iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Es existiert also der Inhalt J der Fläche

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n,$$

und zwar ist

$$J = \iint_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy,$$

analog zu der für stetige partielle Ableitungen bekannten Formel.

12. Zu Flächen der in § 11 behandelten Art *existieren* nun stets Folgen von Polyedern mit den durch die Definition geforderten Eigenschaften, und zwar kann man solche auf besonders einfache Weise als Dreieckspolyeder konstruieren. Zu diesem Zwecke werde nämlich in Q eine Folge von Dreiecksnetzen angegeben, deren jedes aus endlich vielen Dreiecken besteht. Die Maximalseitenlänge soll in der Netzfolge gegen Null konvergieren. Ist ferner d der „Durchmesser“, d. h. die größte Seite eines Dreiecks, und b seine „Breite“, d. h. seine kleinste Höhe, so sollen alle Dreiecke aller Netze noch der Bedingung

$$(46) \quad \frac{d}{b} < \mu$$

unterworfen sein, wo μ eine feste, von n unabhängige Zahl bedeutet²⁾.

²⁾ Diese Beschränkung schließt, wie sich aus dem Folgenden mit ergibt, die Möglichkeit der Konstruktion jener Schwarzschen Folgen von Polyedern aus, die zwar gegen die Fläche konvergieren, deren Ebenenneigungen aber nicht gegen die Neigungen der Tangentenebenen der Fläche konvergieren.

Zu jedem Dreiecksnetz konstruiert man nun das zugehörige Polyeder, indem man in den Eckpunkten jedes Dreiecks die Ordinaten der Fläche errichtet und durch die Endpunkte dieser Ordinaten jene Dreiecke legt, deren Projektionen auf die xy -Ebene gerade die Dreiecke des Netzes sind. Ein solches Polyeder zieht sich schlicht über die xy -Ebene hin, d. h. es wird durch eine eindeutige Funktion $z = p_n(x, y)$ dargestellt. Die so entstandene Folge von Polyedern konvergiert gegen die Fläche wegen der Stetigkeit der Fläche und weil die Maximalseitenlänge der Polyeder gegen Null gehen soll. Es braucht also nur noch nachgewiesen zu werden, daß diese Polyederfolge auch (44) und (45) Genüge leistet, um die Anwendbarkeit unserer Definition sicherzustellen.

13. Aus der Folge von Dreiecksnetzen greifen wir eines, etwa das n -te, heraus und betrachten in diesem Netz ein Dreieck mit den Ecken $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$. Es sei d_n der größte Durchmesser der Dreiecke des n -ten Netzes und b' und d' seien Breite und Durchmesser des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Die Zahlen x_1, x_2, x_3 mögen sich anordnen lassen

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3,$$

wo nicht beidemal das Gleichheitszeichen gelten kann, also jedenfalls

$$x_1 < x_3$$

ist. Durch den Punkt P_2 ziehe ich die Parallele zur y -Achse, die die Gegenseite $P_1 P_3$ im Punkte $P_4 = (x_4, y_4)$ trifft (der eventuell mit P_1 oder P_3 zusammenfallen kann). Es ist somit

$$x_4 = x_2$$

und

$$(47) \quad y_4 = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} y_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} y_3.$$

Im übrigen ist noch

$$(48) \quad |y_2 - y_4| \geq b'.$$

Es sei

$$z_1 = f(x_1, y_1), \quad z_2 = f(x_2, y_2), \quad z_3 = f(x_3, y_3),$$

und z_4 sei die Ordinate desjenigen Punktes \bar{P}_4 des Polyederdreieckes, dessen Projektion auf die xy -Ebene P_4 ist, also

$$(49) \quad z_4 = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} z_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} z_3.$$

In dem ausgewählten Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist nun

$$\frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} = \frac{\partial p_n(x, y)}{\partial y},$$

wo $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ auf dem Rande des Dreiecks die nach innen gerichtete Ableitung bedeute. Da nun

$$\begin{aligned} |z_4 - z_2| &= \left| \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} z_1 + \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_1} z_4 - z_2 \right| = \left| \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} (z_1 - z_2) + \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_1} (z_3 - z_2) \right| \\ &\leq |z_1 - z_2| + |z_3 - z_2| \leq M(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|) \\ &\quad + M(|y_3 - y_2| + |x_3 - x_2|) < 4 M d' \end{aligned}$$

ist, folgt unter Heranziehung von (48) und (46)

$$(50) \quad \left| \frac{\partial p_n}{\partial y} \right| = \left| \frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} \right| < 4 M \frac{d'}{b} < 4 M \mu.$$

Diese Abschätzung ist von n und von der Wahl des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ innerhalb des n -ten Netzes unabhängig, also ist (44) erfüllt. (Einem auf einem Dreiecksrande liegenden Punkt kommen ev. zwei in das Innere benachbarter Dreiecke gerichtete Ableitungen $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ zu; da nun die Abschätzung (50) für beide gilt, so genügt jedenfalls die *vordere* Derivierte in jedem Punkte der Ungleichung (44), die ja für die vordere Derivierte aufgestellt war.) Was hier für $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ bewiesen ist, könnte man, indem man die Rollen von x und y durchweg vertauschte, ebenso für $\frac{\partial p_n}{\partial x}$ beweisen.

14. Es sei nun $P_0 = (x_0, y_0)$ ein zu E^* gehörender Punkt, der im Innern oder auf dem Rande von $P_1 P_2 P_3$ liegt. Mit $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ bezeichnen wir kurz die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ im Punkte P_0 . Zu zeigen ist noch, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} = \frac{\partial f_0}{\partial y}$$

in der Folge jener Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ aller Netze, in deren Innerem oder auf deren Rande P_0 liegt.

Mit r_{ij} möge die Entfernung $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ bezeichnet werden für $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$. Dann ist zunächst für $i = 1, 2, 3$, da P_0 in E^* liegt,

$$(51) \quad z_i = f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_i - x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_i - y_0) + r_{i0} R_i,$$

wo $R_i \rightarrow 0$ mit $r_{i0} \rightarrow 0$, also mit $d_n \rightarrow 0$ oder $n \rightarrow \infty$. Wegen (49) ist

$$z_4 - z_2 = \frac{z_3 - z_2}{x_3 - x_1} (z_1 - z_2) + \frac{z_3 - z_1}{x_3 - x_1} (z_3 - z_2),$$

woraus durch Anwendung von (51) entsteht:

$$z_1 - z_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x} (x_1 - x_2) + \frac{\partial f_0}{\partial y} (y_1 - y_2) \right\} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x} (x_3 - x_2) + \frac{\partial f_0}{\partial y} (y_3 - y_2) \right\} \\ + \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} (r_{10} R_1 - r_{20} R_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (r_{30} R_3 - r_{20} R_2)$$

oder

$$z_1 - z_2 = \frac{\partial f_0}{\partial y} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (y_1 - y_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (y_3 - y_2) \right\} + R,$$

wo unter R die Summe der beiden letzten Glieder der rechten Seite der vorigen Gleichung verstanden ist. Durch (47) erhält man hieraus

$$z_1 - z_2 = \frac{\partial f_0}{\partial y} (y_1 - y_2) + R.$$

Nun ist

$$R = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_1} r_{10} R_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} r_{30} R_3 - r_{20} R_2,$$

folglich

$$|R| \leq r_{10} |R_1| + r_{30} |R_3| + r_{20} |R_2| \leq d' \{ |R_1| + |R_2| + |R_3| \} = d' \cdot R^*,$$

worin also auch $R^* \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$. Da ferner

$$\mu |y_1 - y_2| \geq \mu b' > d'$$

ist, so haben wir

$$|R| < |y_1 - y_2| \mu R^*,$$

daher

$$\frac{z_1 - z_2}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f_0}{\partial y} + \theta \mu R^*, \quad |\theta| < 1.$$

Das heißt aber, es ist in P_0 und ebenso in allen Punkten von E^*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial p_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und eine entsprechende Gleichung gilt für $\frac{\partial f}{\partial x}$ in E^* . Die in § 12 konstruierten Polyederfolgen genügen also der Definition von § 11: die Flächeninhalte der Polyeder konvergieren somit gegen eine Zahl, die wir den Flächeninhalt der Raumfläche genannt haben.

15. Diese Untersuchungen lassen sich auf Flächen ausdehnen, die in der *Gaußschen Parameterdarstellung*

$$(52) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gegeben sind, wo (u, v) in einem Quadrat Q variieren möge und die φ, ψ, χ der Lipschitzschen Bedingung genügen⁴⁾. Ist (u_0, v_0) ein Punkt totaler Differenzierbarkeit von φ, ψ und χ gemeinsam und benennen wir

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0), \quad z_0 = \chi(u_0, v_0),$$

⁴⁾ Nach Herrn Lebesgue [Thèse, Annali di Mat. (8) 7 (1902), S. 315] ist die angegebene Beschaffenheit der Parameterfunktionen notwendig und hinreichend da-

so liegen (nach Überlegungen analog zu § 10) die Tangenten aller durch (x_0, y_0, z_0) gehenden differenzierbaren Kurven der Fläche in dem Gebilde

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses stellt aber eine Ebene — die Tangentenebene — dar, wenn nicht alle drei Funktionaldeterminanten zugleich verschwinden. In der Menge der Punkte also, die zu solchen Parameterpunkten (u, v) gehören, in denen totale Differenzierbarkeit von φ, ψ und χ zugleich herrscht und in denen mindestens eine der Funktionaldeterminanten

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}$$

nicht verschwindet, besitzt die Fläche (52) eine Tangentenebene. Von den Ausnahmepunkten behaupten wir nun, daß sie auf die xy -, die yz - und die zx -Ebene in *Nullmengen* projiziert werden.

Um feste Vorstellungen zu haben, betrachten wir etwa die Projektion auf die xy -Ebene. Zunächst ist die Menge der (u, v) , in der mindestens eine der drei Funktionen (52) nicht total differenzierbar ist, als Vereinigungsmenge dreier Nullmengen selbst eine Nullmenge. Einer solchen aber entspricht durch die Abbildung $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ von der uv -Ebene auf die xy -Ebene nach Hilfssatz 1, § 7, eine Nullmenge. Ferner ist die Teilmenge der Raumfläche, in der alle drei Funktionaldeterminanten verschwinden, enthalten in der Menge, in der nur $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ verschwindet. Die Projektion dieser Menge auf die xy -Ebene ist das Bild jener Menge von Punkten (u, v) , in denen $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ verschwindet. Die letztere Menge ist meßbar wegen der Meßbarkeit der Funktionaldeterminante. Höchstens in einer Teilmenge vom Maße Null stellt in ihr die Funktionaldeterminante nicht das Vergrößerungsverhältnis dar; einer Nullmenge entspricht aber wieder eine Nullmenge der xy -Ebene. Es bleibt also noch die Menge T der (u, v) zu betrachten, in der das Vergrößerungsverhältnis für die Abbildung von der uv -Ebene auf die xy -Ebene Null ist. Dieser Menge T entspricht aber eine Nullmenge T^* als Bild in der xy -Ebene. Denn man kann bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ zu jedem Punkt P von T einen solchen Radius ϱ_P bestimmen, daß für jeden Kreis K_P um P mit kleinerem Radius als ϱ_P

$$\frac{m K_P^*}{m K_P} < \varepsilon$$

für, daß jeder ebenen rektifizierbaren Kurve in Q eine rektifizierbare Raumkurve auf der Raumfläche entspricht. Herr Lebesgue nennt daher solche Flächen gleichfalls „rektifizierbar“, zeigt aber durch ein Beispiel, daß die Rektifizierbarkeit nicht der Fläche an sich zukommt, sondern auch von der Wahl der Parameter abhängt.

ist, wo K_P^* das Bild von K_P sei. Mit abzählbar vielen solcher Kreise K_{P_n} , deren Radius je kleiner als ϱ_{P_n} ist, kann man aber T so überdecken, daß

$$\sum_n m K_{P_n} < mT + \varepsilon$$

ist⁵⁾, und da T^* ganz in der Vereinigungsmenge der Bilder $K_{P_n}^*$ der K_{P_n} liegt, so haben wir

$$mT^* \leq \sum_n m K_{P_n}^* < \varepsilon \sum m K_{P_n} < \varepsilon(mT + \varepsilon),$$

also

$$mT^* = 0$$

wegen der Willkürlichkeit von ε . Wir haben also den

Satz VIII. Jede durch die Gaußsche Parameterdarstellung

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

in einem Quadrat als Bereich der Parameter u, v gegebene Raumfläche, deren Parameterfunktionen φ, ψ, χ der Lipschitzschen Bedingung genügen, besitzt in jedem ihrer Punkte eine wohlbestimmte Tangentenebene außer höchstens in einer solchen Menge ihrer Punkte, deren Projektionen auf die Koordinatenebenen des xyz -Systems Mengen vom Maße Null ausmachen.

16. Auch für diese allgemeinere Darstellung der Raumfläche führen wir ihren Flächeninhalt als Limes der Flächeninhalte von Polyedern ein. Und zwar sollen diese Polyeder folgendermaßen beschaffen sein: sie sollen der Raumfläche einbeschrieben sein, d. h. ihre Ecken sollen auf der Fläche liegen, und sie sollen sich durch drei *eindeutige* Funktionen

$$x = p_n(u, v), \quad y = q_n(u, v), \quad z = r_n(u, v)$$

so darstellen lassen, daß

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(u, v) = \varphi(u, v) \quad \text{usw.},$$

und daß in einem maßgleichen Kern von Q

$$(54) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial p_n}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{usw.}$$

ist (wo an den Stellen, wo die Ableitungen der Polyederfunktionen nicht existieren, wieder die vorderen Derivierten unter $\frac{\partial p_n}{\partial u}$ usw. zu verstehen sind) und daß die p_n, q_n, r_n gleichmäßig in n der Lipschitzschen Bedingung genügen. Eine Polyederfolge, die diesen Forderungen genügt, konvergiert

⁵⁾ Vgl. z. B. Rademacher, Dissertation, S. 9, Satz II.

im xyz -Raum gegen die Raumfläche (52), und ihre Ebenenneigungen konvergieren gegen die Neigungen der Tangentenebenen, wo diese existieren.

Sind dann $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{G}_n$ die zum n -ten Polyeder gehörenden Fundamentalgrößen 1. Ordnung und E, F, G die zur Fläche gehörenden, so ist in einem maßgleichen Kern von Q

$$(55) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{E}_n = E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}_n = F, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{G}_n = G,$$

wobei die $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{G}_n$ als aufgebaut aus den gleichmäßig beschränkten Größen $\frac{\partial p_n}{\partial u}$ usw. selbst gleichmäßig beschränkt bleiben. Der Flächeninhalt des n -ten Polyeders ist aber bekanntlich gleich

$$J_n = \iint_Q \sqrt{\mathfrak{E}_n \mathfrak{G}_n - \mathfrak{F}_n^2} du dv,$$

und es existiert wegen (55) und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Integranden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_Q \sqrt{\mathfrak{E}_n \mathfrak{G}_n - \mathfrak{F}_n^2} du dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

welche Zahl wir als den Inhalt der Raumfläche bezeichnen.

Daß nun überhaupt Polyeder *existieren*, die durch drei eindeutige Funktionen

$$x = p_n(u, v), \quad y = q_n(u, v), \quad z = r_n(u, v)$$

mit den Eigenschaften (53) und (54) dargestellt werden, sieht man, indem man die Konstruktionen von § 12 auch hier anwendet. Man gibt dazu in dem Quadrat Q der uv -Ebene wieder eine Folge von Dreiecksnetzen an, die der Beschränkung (46) unterworfen sind, und konstruiert zu jedem Netz die drei Polyederfunktionen p_n, q_n, r_n , die bzw. zu φ, ψ und χ ebenso gehören wie oben das p_n zu f . Es gelten dann zufolge der Überlegungen von § 13 und § 14 die Lipschitzsche Bedingung und die Gleichungen (53) und (54).

Somit können wir den Satz aussprechen:

Satz IX. Jede in der Gaußschen Parameterdarstellung

$$x = \varphi(x, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gegebene Fläche, deren Parameterfunktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen (also jede „rektifizierbare“ Raumfläche), läßt sich durch eingeschriebene Dreieckspolyeder so approximieren, daß die Neigungen der Polyederebenen gegen die der Tangentenebenen der Fläche konvergieren, wo diese existieren, und daß für die Flächeninhalte J_n der Polyeder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv$$

gilt⁶⁾.

Zusatz: Der so definierte Flächeninhalt der Raumfläche ist invariant gegenüber einer eindeutigen Parametertransformation $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$, die selbst der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Der Beweis dieses Zusatzes ergibt sich sofort, wenn man sich des Determinantenausdrucks für $EG - F^2$ erinnert und Satz V und Satz VI heranzieht. Dabei ist noch zu beachten, daß eine der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $\varphi(u, v)$ durch eine der gleichen Bedingung genügende Transformation wieder in eine Funktion von der gleichen Eigenschaft übergeht, wie in § 8 bewiesen ist.

17. Anstatt den Inhalt der ganzen zu Q gehörenden Fläche anzugeben, kann man natürlich genau so den Inhalt einer ihrer Teilmengen \bar{R} definieren und berechnen, wenn \bar{R} Bild eines in Q liegenden Intervalles R ist:

$$J(\bar{R}) = \iint_R \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Ebenso wie man nun den Inhalt einer ebenen Menge definiert als die untere Grenze der Inhaltssumme solcher Intervallmengen, die jene Menge überdecken, so definieren wir den Inhalt $J(\bar{U})$ einer auf der Raumfläche gelegenen Punktmenge \bar{U} , die Bild der Menge U in Q ist, als

$$(56) \quad J(\bar{U}) = \text{untere Grenze } \sum_j J(\bar{R}_j) = \text{untere Grenze } \sum_j \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

⁶⁾ Herr Lebesgue (l. c. S. 814) weist nur darauf hin, daß für alle der Fläche eingeschriebenen Polyederfolgen $\liminf J_n \leq \iint \sqrt{EG - F^2} du dv$ ist. — Neuerdings hat Herr W. H. Young [Lond. R. S. Proc. (A) 96 (1919), S. 71–81] als Formel für den Flächeninhalt „rektifizierbarer“ Flächen gleichfalls $J = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv$ bewiesen. Doch gelangt Herr Young dahin nur durch eine besondere neue Definition des Flächeninhaltes, die einen doppelten Grenzübergang involviert. Durch Rechtecksteilung von Q parallel zum u, v -System erhält man auf der Raumfläche eine gewisse Mascheneinteilung. Jeder Masche wird nun eine Zahl zugeordnet, die selbst als *Limes* auftritt. Die Summe dieser Zahlen liefert im Grenzübergang für unbegrenzt feiner werdende Rechtecksteilungen den Inhalt der Raumfläche. Unsere Überlegungen dagegen zeigen, daß ein einfacher Grenzübergang, zudem ein Grenzübergang an einer Folge von Polyedern, wie man sie zu stetig differenzierbaren Flächen schon immer konstruiert hat, genügt. Überdies ist für Herrn Youngs Definition die Teilung des uv -Gebietes in *achsenparallele Rechtecke* wesentlich, und die Invarianz gegenüber eindeutiger Transformation der Parameter wird gar nicht erst untersucht. In der Tat bedürfte es dazu auch eines Hilfsmittels wie unseres Satzes I, der aus der Beschränktheit der partiellen Derivierten nach x und nach y einen Schluß auf die totale Differenzierbarkeit, d. h. auf das Verhalten der Fläche nach *allen* von dem Flächenpunkte ausgehenden Richtungen erlaubt. (Anmerkung bei der Korrektur, 24. Febr. 1920.)

wo die Intervalle R_j die Menge U völlig überdecken sollen. Ist nun U meßbar, so wollen wir auch \bar{U} meßbar nennen. In diesem Falle ist nach der Definition zunächst:

$$(57) \quad J(\bar{U}) \geq \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Andererseits gibt es zufolge der Definition des Inhaltes einer ebenen Punktmenge gewiß eine Menge von Intervallen R_j , die U überdecken, so daß

$$(58) \quad \sum m R_j < m U + \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben ist. Wir setzen nun

$$\begin{array}{ll} A_1 = R_1 U & B_1 = R_1 - A_1 \\ A_2 = R_2 (U - A_1) & B_2 = R_2 - A_2 \\ A_3 = R_3 (U - A_1 - A_2) & B_3 = R_3 - A_3 \\ \dots & \dots \\ A_j = R_j (U - A_1 - A_2 - \dots - A_{j-1}) & B_j = R_j - A_j \\ \dots & \dots \end{array}$$

so ist erstens der Durchschnitt $A_j A_k$ für alle Zahlen $j \neq k$ leer, und zweitens ist, da die R_j ganz U überdecken:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots = U.$$

Somit haben wir

$$(59) \quad \sum \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \sum (\iint_{A_j} + \iint_{B_j}) = \sum \iint_{A_j} + \sum \iint_{B_j} = \iint_U + \sum \iint_{B_j}.$$

Nun ist aber die Lipschitzsche Bedingung

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| < M \text{ usw.},$$

vorausgesetzt, woraus wegen der Definition der E, F, G folgt:

$$|E|, |F|, |G| < 3M^2$$

und

$$\sqrt{EG - F^2} \leq \sqrt{EG} < 3M^2,$$

daher also

$$\begin{aligned} \sum \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv &< 3M^2 \sum m R_j = 3M^2 \sum m (R_j - A_j) \\ &= 3M^2 \left(\sum m R_j - \sum m A_j \right) = 3M^2 \left(\sum m R_j - m U \right). \end{aligned}$$

Folglich ergeben (58) und (59):

$$\sum \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv < \iint_U \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv + 3M^2 \varepsilon,$$

woraus wegen der Willkürlichkeit von ε mit (56) zusammen folgt

$$J(\bar{U}) \leq \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

was mit (57) zusammen ergibt

$$J(\bar{U}) = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

(Man hätte diese Inhaltsformel ja auch einfach durch Definition setzen können, doch zeigt unsere Ableitung, daß man zu ihr zwangsläufig geführt wird, sobald man die Inhaltsformel kennt für die Flächenstücke, die Bilder von Intervallen der Parameterebene sind.)

Nun sind E, F, G in der Flächentheorie so definiert, daß

$$EG - F^2 = \left(\frac{D(\varphi, \varphi)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\varphi, \chi)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)} \right)^2$$

ist. Es sei nun \bar{Z} die Punktmenge auf der Fläche, wo keine Tangentenebene existiert, und sie sei Bild der Menge Z der Parameterebene. Es ist dann

$$J(\bar{Z}) = \iint_Z \sqrt{\left(\frac{D(\varphi, \varphi)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\varphi, \chi)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)} \right)^2} du dv,$$

denn Z ist meßbar, da es erstens aus der Nullmenge besteht, in der φ oder ψ oder χ nicht total differenzierbar sind, ferner aus der meßbaren Menge, in der die drei Funktionaldeterminanten zugleich verschwinden. Daraus folgt zugleich

$$J(\bar{Z}) = 0$$

und somit der

Satz X. *Diejenige Punktmenge, in der eine in Parameterdarstellung gegebene Raumfläche, deren Parameterfunktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen, keine Tangentenebene besitzt, hat auf der Fläche selbst gemessen den Inhalt Null.*

März 1919.

(Angenommen Juni 1919.)

Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Von

Karl Bögel in Köslin.

In vorliegender Arbeit, die inhaltlich an eine Arbeit von Herrn Baire anknüpft, sind folgende Bezeichnungen angewandt:

$f(x, y)$ sei eine beliebige Funktion der beiden Veränderlichen x und y ; U sei ein zweidimensionales, J ein eindimensionales Intervall ihres Definitionsbereiches. Dann bedeute $S[f, U]$ bzw. $S[f, J]$ die Schwankung der Funktion in dem betreffenden Intervall. S ist also stets eine Intervallfunktion.

Konvergieren die abzählbar unendlich vielen ineinander geschachtelten zweidimensionalen Intervalle U_n nach einem einzigen Punkte P , so bedeutet

$$\omega[f, P] = \lim_{n \rightarrow \infty} S[f, U_n]$$

die Schwankung der Funktion in dem Punkte P , die auch in den Randpunkten des Definitionsbereiches von $f(x, y)$ definiert ist.

Ist $\omega[f, P] = 0$, so heiße die Funktion „in P zweidimensional stetig“.

Konvergieren die abzählbar unendlich vielen ineinander geschachtelten eindimensionalen x -Intervalle

$$J_n: \{a_n < x < b_n; y = \text{const}\}$$

nach einem einzigen Punkte P , so bedeutet

$$\omega_x[f, P] = \lim_{n \rightarrow \infty} S[f, J_n]$$

die „ x -Schwankung“ der Funktion in dem Punkte P .

Ist $\omega_x[f, P] = 0$, so heiße die Funktion „stetig nach x im Punkte P “.

Analog seien $\omega_y[f, P]$ und die „Stetigkeit nach y “ definiert.

ω , ω_x und ω_y sind somit stets Punktfunktionen. Bekanntlich folgt

nun aus $\omega_x = \omega_y = 0$ noch lange nicht $\omega = 0$. Aber Herr Baire hat folgenden merkwürdigen Satz bewiesen¹⁾:

„In einem Bereich sei

1. überall $\omega_y = 0$;
2. zwischen zwei Parallelen zur x -Achse gehe es immer eine dritte, auf der überall $\omega_x = 0$ sei;
3. $y = \varphi(x)$ sei eine stetige Kurve C in dem Bereich; $\varphi(x)$ also eine eindeutige und stetige Funktion von x .

Dann gibt es auf C Punkte, in denen $\omega = 0$ ist.“

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit sind nun zunächst die Voraussetzungen dieses Baireschen Satzes wesentlich verallgemeinert. Voraussetzung 2 läßt sich ersetzen durch die allgemeinere:

„Ist ε eine vorgegebene Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; a < y < b\}$ stets einen Punkt, in dem $\omega_x < \varepsilon$ sei.“ Die Stetigkeit nach x wird also nirgends vorausgesetzt.

Ferner kann an Stelle der bezüglich y eindeutigen Kurve $y = \varphi(x)$ die beliebige stetige Kurve $\{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ treten; die einzige Beschränkung wird sein, daß $\varphi(t)$ keine Konstante sein darf; außerdem wird durch ein Beispiel, das mir freundlichst von Herrn Rademacher mitgeteilt wurde, nachgewiesen werden, daß diese Einschränkung notwendig ist. Und eine weitere von Herrn Carathéodory angegebene Funktion wird im Anhang (§ 15) den Beweis erbringen, daß die Stetigkeitspunkte unter den gegebenen Voraussetzungen eine Nullmenge bilden können.

In eigentümlicher Weise lassen sich die Voraussetzungen abändern, wenn es sich um eine fest gegebene Kurve $\{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ handelt. Damit dieselbe zweidimensionale Stetigkeitspunkte enthält, braucht man dann nur vorauszusetzen, daß allein in den Kurvenpunkten $\omega_y = 0$ sei und dafür überall $\omega_x = 0$. Setzt man außerdem voraus, daß die Punkte, welche nicht zur Kurve gehören, auf jeder Parallelen zur y -Achse dicht liegen, so braucht ω_x sogar nur außerhalb der Kurve gleich Null zu sein.

Auch in diesem Falle darf $\varphi(t)$ keine Konstante sein; und eine einfache Funktion wird den Nachweis erbringen, daß diese Beschränkung auch hier notwendig ist.

Die Sätze des zweiten Abschnittes sind noch bedeutend weitere Verallgemeinerungen und enthalten alle Resultate des ersten Abschnittes als Spezialfälle. Die Voraussetzungen $\omega_y = 0$ und $\omega_x < \varepsilon$ werden nämlich ersetzt durch $\omega_y \leq \beta$ und $\omega_x < \alpha + \varepsilon$, wo α und β zwei positive Konstanten

¹⁾ „Sur les fonctions de variables réelles“. Ann. di matem. pura ed appl. (3) 3 (1899).

sind. Daraus läßt sich die Existenz von Kurvenpunkten folgern, in denen $\omega \leq 2\alpha + 3\beta$ ist; und ein Beispiel wird nachweisen, daß dies die beste erreichbare Abschätzung ist. Ist aber überall $\omega_y \leq \beta$ und $\omega_x \leq \alpha$, so gibt es Kurvenpunkte, in welchen $\omega \leq \text{Min}(2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$ ist. Für $\varphi(t) = \text{const}$ folgt allerdings nur $\omega \leq \alpha + 2\beta$; für $\psi(t) = \text{const}$ nur $\omega \leq 2\alpha + \beta$.

Ist C wieder eine fest gegebene Kurve, so folgt aus den Voraussetzungen: überall $\omega_x \leq \alpha$, überall auf $C: \omega_y \leq \beta$, daß es auf C Punkte gibt, in denen $\omega \leq 2\alpha + \beta$ ist; und auch dies wird sich als die beste Abschätzung erweisen.

1. Abschnitt.

Die Stetigkeit von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz I.

„Es sei gegeben:

1. ein Rechteck $U \{a < x < b; c < y < d\}$;
2. eine beliebige stetige Kurve $C \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$, wo $\sigma < t < \tau$ ist, d. h. $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ zwei beliebige stetige Parameterfunktionen, mit der einzigen Einschränkung, daß
3. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \leq \varphi(\vartheta_2)$ sei. Mit anderen Worten: die Kurve enthalte kein der y -Achse paralleles Teilstück;
4. in U befinde sich ein Kurvenpunkt $P_1 \{x_1 = \varphi(t_1); y_1 = \psi(t_1)\}$.

Dann läßt sich aus U ein Teilstreifen V von derselben Höhe heraus-schneiden, innerhalb dessen auf jeder Parallelen zur y -Achse sich ein Kurvenpunkt befindet.“

Beweis.

Im Inneren von U gibt es nach (4) und (2) ein Kurvenstück $C_1 \{|t - t_1| < \delta_1\}$, ein Teilstück von C . Auf C_1 besitzt $\varphi(t)$ einen kleinsten

Wert $\varphi(\sigma_1) = a_1$ und einen größten Wert $\varphi(\tau_1) = b_1$, die nach (3) voneinander verschieden sind. Außerdem nimmt $\varphi(t)$ als stetige Funktion von t im Intervall $\sigma_1 < t < \tau_1$ alle Werte zwischen a_1 und b_1 mindestens einmal an. In jedem y -Intervall

$H \{a_1 < x = \text{const} < b_1; c < y < d\}$ gibt es somit einen Punkt von C_1 ;

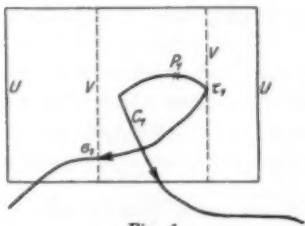


Fig. 1.

der Streifen $V: \{a_1 < x < b_1; c < y < d\}$ hat somit die geforderte Eigenschaft.

Hilfssatz II.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. $f(x, y)$ überall definiert;
2. überall $\omega_y = 0$.
3. Ist λ eine vorgegebene positive Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereichs einen Punkt P , in dem $\omega_x[f, P] < \lambda$ sei.

4. In jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq a_n < x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe wie U hat, sei $S[f, U_n] \geq \gamma$, wo γ eine positive Konstante ist.

5. ε sei eine beliebige positive Größe, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H_r: \{x = x_r; c < y < d\}$, welche dieselbe Höhe wie U haben und in denen $S[f, H_r] \leq \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U .

Beweis.

Es sei $V: \{a \leq a_1 < x < b_1 \leq b; c < y < d\}$ ein beliebiger Teilstreifen von U .

Die Funktion sei nun zunächst nach unten beschränkt innerhalb V ; ihre untere Grenze sei g . Es gibt also in V einen Punkt P_1 , in dem

$$f(P_1) < g + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{I}) \text{ ist,}$$

und nach (2) ein P_1 enthaltendes, ganz in V gelegenes y -Intervall J_1 , in welchem

$$S[f, J_1] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{II}) \text{ ist.}$$

Das Intervall J_1 enthält aber nach (3) einen Punkt $Q_1(x_1, y_1)$, in welchem $\omega_x[f, Q_1] < \frac{\varepsilon}{6}$ ist, also existiert ein Q_1 enthaltendes, ganz in V gelegenes x -Intervall $K_1: \{a_1 \leq a_2 < x < b_2 \leq b_1; y = y_1\}$, in welchem

$$S[f, K_1] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{III}) \text{ ist.}$$

Aus I–III folgt sofort, daß im ganzen Intervall K_1

$$f(x, y) < g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{IV}) \text{ ist.}$$

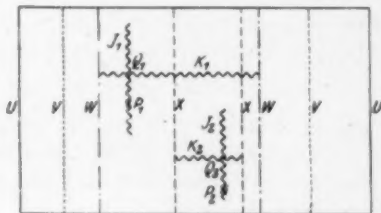


Fig. 2.

Grenzt man nun den Streifen $W: \{a_0 < x < b_0; c < y < d\}$ ab, so ist die untere Grenze von $f(x, y)$ innerhalb W nicht kleiner als g . Nach (4) enthält somit W einen Punkt P_2 , in welchem

$$f(P_2) > g + \gamma - \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{V}) \text{ ist.}$$

Ferner gibt es ein P_2 enthaltendes, ganz in W gelegenes y -Intervall J_2 , in welchem nach (2)

$$S[f, J_2] < \frac{\varepsilon}{6} \text{ ist,}$$

und nach (3) im Inneren von J_2 einen Punkt $Q_2(x_2, y_2)$, in welchem $\omega_x[f, Q_2] < \frac{\varepsilon}{6}$ ist, d. h. aber es gibt ein Q_2 enthaltendes, ganz in W gelegenes x -Intervall

$$K_2: \{a_2 \leq a_0 < x < b_2 \leq b_0; y = y_2\},$$

in welchem

$$S[f, K_2] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{VII}) \text{ ist.}$$

Aus V–VII folgt aber, daß im ganzen Intervall K_2

$$f(x, y) > g + \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VIII}) \text{ ist.}$$

IV und VIII ergeben nun schließlich zusammengenommen, daß in jedem y -Intervall $H_r: \{a_0 < x = x_r < b_0; c < y < d\}$ des Rechtecks $X: \{a_0 < x < b_0; c < y < d\}$ die Schwankung

$$S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon \text{ ist,}$$

womit der Satz bewiesen ist. Ist zweitens die Funktion in V nicht nach unten beschränkt, wohl aber in einem Teilstreifen V_1 von derselben Höhe, so läßt sich in V_1 , also auch in V , ein Teilstreifen X mit der geforderten Eigenschaft finden.

Ist schließlich die Funktion in keinem Teilstreifen von V nach unten beschränkt, so sei P_1 irgendein Punkt von V , und es sei

$$f(P_1) = k \quad (\text{I}).$$

Dann gibt es analog dem vorhergehenden ein P_1 einschließendes y -Intervall J_1 , in welchem

$$S[f, J_1] < \gamma \quad (\text{II}) \text{ ist,}$$

und ein J_1 kreuzendes x -Intervall K_1 , in welchem ebenfalls

$$S[f, K_1] < \gamma \quad (\text{III}) \text{ ist.}$$

Im ganzen Intervall K_1 ist somit

$$f(x, y) > k - 2\gamma \quad (\text{IV}).$$

Grenzt man wie vorhin das Rechteck W ab, so enthält dies nunmehr einen Punkt P_2 , in welchem

$$f(P_2) < k - 5\gamma \text{ (V) ist;}$$

J_2 und K_2 lassen sich wieder so abgrenzen, daß

$$S[f, J_2] < \gamma \text{ und } S[f, K_2] < \gamma \text{ (VI, VII) sind.}$$

Im ganzen Intervall K_2 ist also

$$f(x, y) < k - 3\gamma \text{ (VIII),}$$

somit in jedem y -Intervall H_r des Streifens X

$$S[f, H_r] > \gamma,$$

womit auch dieser Teil des Satzes bewiesen ist.

Hilfssatz III.

„In allen Punkten des Bereiches $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. $f(x, y)$ definiert.
2. Es sei $\{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ eine beliebige stetige Kurve C , die ganz im Inneren von U verläuft ($\sigma < t < \tau$).
3. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq \gamma$ ist, entweder nirgends dicht auf C , oder es gibt ein Teilstück Z von C , in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq \gamma$ ist.“

Beweis.

Zunächst sei kurz darauf hingewiesen, daß die Menge A der Punkte, in welchen $\omega \geq \gamma$ ist, abgeschlossen ist. Ist nämlich P ein Häufungspunkt von A , so gibt es in jeder Umgebung U_n von P einen Punkt P_n , der zu A gehört, es ist also $S[f, U_n] \geq \gamma$. Da dies für jede Umgebung von P gilt, ist somit $\omega[f, P] \geq \gamma$, womit bewiesen ist, daß P zu A gehört.

Liegen nun die Punkte der Menge A überall dicht auf dem stetigen Kurvenstück Z , so sind sämtliche Punkte von Z Häufungspunkte von A und gehören nach dem eben bewiesenen zu A . In allen Punkten von Z ist somit $\omega \geq \gamma$, was zu beweisen war.

Hilfssatz IV.

„In allen Punkten des Bereiches $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. die Funktion $f(x, y)$ definiert;
2. $\omega_y = 0$.
3. Ist λ eine vorgegebene positive Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; c \leq y < d, y \leq d\}$ des Bereiches U einen Punkt P , in dem $\omega_x[f, P] < \lambda$ sei.

4. Es sei $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ eine beliebige stetige Kurve, die ganz im Innern von U verlaufe, mit der einzigen Einschränkung, daß

5. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei.

6. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq \gamma$ ist, nirgends dicht auf C .

Beweis.

Es sei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \rightarrow 0$.

Der Satz sei falsch. Nach Hilfssatz III gibt es also ein Kurvenstück $Z: \{\sigma \leq \sigma_1 < t < \tau_1 \leq \tau\}$, in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq \gamma$ ist. In dem (ganz in U liegenden) Rechteck $U_{n-1}: \{a \leq a_{n-1} < x < b_{n-1} \leq b; |y - y_{n-1}| < c_{n-1} < \frac{1}{n-1}\}$ liege ein Punkt $P_n: \{x_n = \varphi(t_n); y_n = \psi(t_n)\}$ von Z , es sei also $\sigma_1 < t_n < \tau_1$. Dann läßt sich P_n zunächst mit einem Rechteck $V_n: \{x - x_n < k_n; |y - y_n| < c_n < \frac{1}{n}\}$ umgeben, welches ganz innerhalb U_{n-1} liegt.

Nach Hilfssatz I läßt sich dann aus V_n ein Teilstreifen

$$W_n: \{\vartheta_n < x < \zeta_n; |y - y_n| < c_n\}$$

herausschneiden, innerhalb dessen sich auf jeder Parallelen zur y -Achse ein Punkt von Z befindet. Da aber in allen Punkten von Z die Schwan-

kung $\omega > \gamma$ ist, so sind für das Rechteck W_n die Voraussetzungen des Hilfssatzes II erfüllt, und W_n besitzt somit einen gleich hohen Teilstreifen

$U_n: \{a_n < x < b_n; |y - y_n| < c_n\}$, in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen $H_r: \{a_n < x = x_r < b_n; |y - y_n| < c_n\}$ die

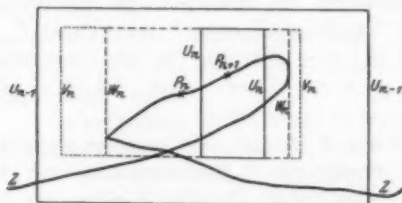


Fig. 3.

Schwankung $S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon_n$ ist.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine abzählbar unendliche Folge von ineinander geschachtelten Rechtecken U_k von folgenden Eigenschaften:

a) Es ist stets $U_k: \{a_k < x < b_k; |y - y_k| < c_k < \frac{1}{k}\}$, d. h. die Höhen der Rechtecke nehmen nach Null zu ab.

b) Auf jeder Parallelen zur y -Achse, welche durch U_k hindurchgeht, wird durch U_k ein Intervall H ausgeschnitten, für welches $S[f, H] > \gamma - \varepsilon_k$ ist.

c) In U_k gibt es einen Punkt P_{k+1} von Z .

Der Durchschnitt der U_k enthält mindestens einen Punkt $P(\xi, \eta)$. In jeder y -Umgebung $J: \{x = \xi; |y - \eta| < \delta\}$ von P ist also $S[f, J] > \gamma - \varepsilon_k$ für jedes beliebige k ; somit

$$\omega_y[f, P] \geq \gamma$$

im Widerspruch zu Voraussetzung (2).

§ 2.

Beweis des verallgemeinerten Baireschen Satzes.

„In allen Punkten des Bereiches $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. die Funktion $f(x, y)$ definiert;

2. $\omega_y = 0$.

3. Ist λ eine vorgegebene positive Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereiches U einen Punkt P_1 , in dem $\omega_x[f, P] < \lambda$ sei.

4. Es sei $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ eine beliebige stetige Kurve, ganz innerhalb U verlaufend, mit der einzigen Einschränkung, daß

5. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte θ_1 und θ_2 gebe, für welche $\varphi(\theta_1) \geq \varphi(\theta_2)$ sei; mit anderen Worten: C enthalte kein der y -Achse paralleles Teilstück^{*)}.

Dann enthält C Punkte, in welchen $\omega = 0$ ist, und diese Punkte liegen überall dicht auf C .

Beweis.

Es sei $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n > \dots \rightarrow 0$.

Ist nun C_{n-1} ein inneres Teilstück $\{\sigma < \sigma_{n-1} < t < \tau_{n-1} < \tau\}$ von C , so gibt es nach Hilfssatz IV ein inneres Teilstück $C_n \{\sigma_{n-1} < \sigma_n < t < \tau_n < \tau_{n-1}\}$ von C_{n-1} , in dessen sämtlichen Punkten $\omega < \gamma_n$ ist. Setzt man diese Schlußweise fort, so erhält man abzählbar unendlich viele Kurvenstücke $C_k: \{\sigma_k < t < \tau_k\}$, von denen immer eins das folgende enthält. Die entsprechenden ineinandergeschachtelten t -Intervalle haben mindestens einen Punkt $t = \theta$ gemeinsam.

In dem Kurvenpunkt $P: \{x = \varphi(\theta); y = \psi(\theta)\}$ ist somit $\omega[f, P] < \gamma_k$ für jedes k , d. h.

$$\omega[f, P] = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

^{*)} Was natürlich nicht hindert, daß C alle Punkte einer solchen Parallelen enthält.

§ 3.

Nachweis der Notwendigkeit von Voraussetzung (5).

Herr Rademacher teilte mir brieflich folgendes Beispiel einer Funktion mit, welche die Bedingungen 1–3 erfüllt, aber auf der y -Achse keinen Stetigkeitspunkt besitzt.

Es sei

$$f(x, y) = 0 \quad \text{für } x = 0.$$

Im folgenden sei p eine positive ganze, q eine beliebige ganze Zahl. Dann sei

$$f\left(\pm \frac{1}{2^p}, y\right)$$

eine stückweise lineare Funktion von y , die an den Punkten $y = \frac{q}{2^p}$ gleich Null sei, an den mitten zwischen diesen Punkten liegenden Punkten $y = \frac{2q+1}{2^{p+1}}$ aber den Wert 1 habe, und zwischen diesen Funktionswerten linear verläuft. Die Funktion ist somit auf der y -Achse und auf gewissen, sich gegen die y -Achse häufenden Parallelen definiert. In den anderen Punkten der Ebene werde sie zwischen diesen Parallelen als Funktion von x linear interpoliert. Man kann diese Funktion darstellen durch die drei Formeln:

$$f(0, y) = 0,$$

$$f\left(\pm \frac{1+\xi}{2^p}, \frac{2q \pm \theta}{2^p}\right) = \theta(2 - \xi), \quad \text{wo } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2},$$

$$f\left(\pm \frac{1+\xi}{2^p}, \frac{2q \pm \theta}{2^p}\right) = \theta(3\xi - 2) + 2(1 - \xi), \\ \text{wo } 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1.$$

Die so entstandene Funktion ist für $|x| > 0$ zweidimensional stetig. Für $x = 0$ ist stets $\omega_y = 0$, und in den überall dichten Punkten $\{x = 0; y = \frac{q}{2^p}\}$ der y -Achse ist $\omega_x = 0$, da $f(x, \frac{q}{2^p}) = 0$ ist für $|x| \leq \frac{1}{2^p}$.

Die Bedingungen 1–3 des in § 2 bewiesenen Satzes sind also reichlich erfüllt. Und doch ist in allen Punkten der y -Achse $\omega = 1$. Denn ist $P(0, y_1)$ ein beliebiger Punkt der y -Achse, und U eine Umgebung desselben, so läßt sich innerhalb U um P ein Quadrat $V: \{|x| < \delta; |y - y_1| < \delta\}$ abgrenzen, und es gibt dann ein p derart, daß $\delta > \frac{1}{2^p}$ ist. Somit befindet sich innerhalb V ein Punkt $Q(\frac{1}{2^p}, \frac{2q+1}{2^{p+1}})$, in welchem $f(Q) = 1$ ist. Da dies für jede Umgebung von P gilt, $f(P)$ selbst aber Null ist, so ist somit $\omega[f, P] = 1$.

§ 4.

Weitere Hilfssätze.

Hilfssatz V.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. $f(x, y)$ überall definiert;

2. $\omega_x = 0$;

3. in jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq a_n < x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe hat wie U , sei $S[f, U_n] \geq \gamma$, wo γ eine positive Konstante ist;

4. ε sei eine beliebige positive Größe, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H_\varepsilon: \{x = x_\varepsilon; c < y < d\}$, in denen $S[f, H_\varepsilon] \leq \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U ."

Beweis.

Es sei $V: \{a \leq a_1 < x < b_1 \leq b; c < y < d\}$ ein beliebiger Teilstreifen von U .

Die Funktion sei nun zunächst nach unten beschränkt, ihre untere Grenze innerhalb V sei g . Es gibt also in V einen Punkt $P_1(x_1, y_1)$, in welchem

$$f(P_1) < \gamma + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{I}) \text{ ist,}$$

und nach (2) ein P_1 enthaltendes, ganz in V gelegenes x -Intervall $J: \{a_1 \leq a_2 < x < b_2 \leq b; y = y_1\}$, in welchem

$$S[f, J] < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{II}) \text{ ist.}$$

I und II ergeben, daß im ganzen Intervall J

$$f(x, y) < g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{III}) \text{ ist.}$$

Grenzt man nun den Streifen $W: \{a_2 < x < b_2; c < y < d\}$ ab, so ist die untere Grenze von $f(x, y)$ innerhalb W nicht kleiner als g . Nach (3) enthält somit W einen Punkt $P_2(x_2, y_2)$, in welchem

$$f(P_2) > g + \gamma - \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{IV}),$$

und nach (2) ein P_2 enthaltendes x -Intervall

$$K: \{a_2 \leq a_3 < x < b_3 \leq b_2; y = y_2\},$$

in welchem

$$S[f, K] < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{V}) \text{ ist.}$$

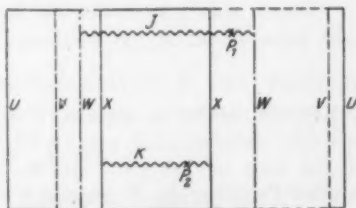


Fig. 4.

IV und V ergeben, daß im ganzen Intervall K

$$f(x, y) > g + \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \text{ (VI) ist.}$$

Aus III und VI folgt schließlich, daß in jedem y -Intervall

$$H_r: \{a_s < x = x_r < b_s; c < y < d\}$$

des Rechtecks

$$X: \{a_s < x < b_s; c < y < d\}$$

die Schwankung

$$S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon \text{ ist,}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ist zweitens die Funktion in V nicht nach unten beschränkt, wohl aber in einem Teilstreifen V_1 von V mit derselben Höhe, so läßt sich in V_1 , also auch in V , ein Teilstreifen X mit der geforderten Eigenschaft finden.

Ist schließlich $f(x, y)$ in keinem Teilstreifen von V nach unten beschränkt, so sei P_1 irgendein Punkt von V , und es sei

$$f(P_1) = k \text{ (I).}$$

Dann gibt es ein P_1 einschließendes x -Intervall

$$J: \{a_1 \leq a_2 < x < b_2 \leq b_1; y = y_1\},$$

in welchem

$$S[f, J] < \gamma \text{ (II) ist.}$$

Überall in J ist also

$$f(x, y) > k - \gamma \text{ (III).}$$

Grenzt man wie vorhin das Rechteck W ab, so enthält dies nunmehr einen Punkt P_2 , in welchem

$$f(P_2) < k - 3\gamma \text{ (IV) ist;}$$

K läßt sich wieder so abgrenzen, daß

$$S[f, K] < \gamma \text{ (V) ist;}$$

in allen Punkten von K ist also

$$f(x, y) < k - 2\gamma \text{ (VI),}$$

somit in jedem y -Intervall H_r des Streifens X

$$S[f, H_r] > \gamma,$$

womit auch dieser Teil des Satzes bewiesen ist.

Hilfssatz VI.

„Im Bereich $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ gegeben, mit der Einschränkung, daß

2. in jedem Teilintervall derselben $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei;
3. überall $f(x, y)$ definiert;
4. überall $\omega_x = 0$;
5. in den Punkten von C sei $\omega_y = 0$;
6. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq \gamma$ ist, nirgends dicht auf C .

Beweis. (Vgl. Abb. 3.)

Es sei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \rightarrow 0$.

Der Satz sei falsch. Nach Hilfssatz III gibt es also ein Kurvenstück $Z: \{\sigma \leq \sigma_1 < t < \tau_1 \leq \tau\}$, in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq \gamma$ ist. In dem ganz in U liegenden Rechteck

$$U_{n-1}: \left\{ a < a_{n-1} < x < b_{n-1} < b; |y - y_{n-1}| < c_{n-1} < \frac{1}{n-1} \right\}$$

liege ein Teilstück $Z_{n-1}: \{\sigma_{n-1} < t < \tau_{n-1}\}$ von Z ; es sei also

$$a_1 < a_{n-1} < t < \tau_{n-1} < \tau_1;$$

außerdem sei die Breite des Rechtecks

$$0 < b_{n-1} - a_{n-1} < \frac{1}{n-1}.$$

$P_n(x_n, y_n)$ sei ein beliebiger innerer Punkt von Z_{n-1} . Dann läßt sich P_n zunächst mit einem Rechteck

$$V_n: \left\{ |x - x_n| < k_n < \frac{1}{n}; |y - y_n| < c_n < \frac{1}{n} \right\}$$

umgeben, welches ganz in U_{n-1} liegt.

Nach Hilfssatz I läßt sich des weiteren aus V_n ein Teilstreifen $W_n: \{\vartheta_n < x < \zeta_n; |y - y_n| < c_n\}$ herauschneiden, innerhalb dessen sich auf jeder Parallelen zur y -Achse ein Punkt von Z_{n-1} befindet. Da aber in allen Punkten von Z_{n-1} die Schwankung $\omega > \gamma$ ist, so sind für das Rechteck W_n die Voraussetzungen des Hilfssatzes V erfüllt, und W_n besitzt somit einen gleich hohen Teilstreifen $U_n: \{a_n < x < b_n; |y - y_n| < c_n\}$, in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen

$$H_r: \{a_n < x = x_r < b_n; |y - y_n| < c_n\}$$

die Schwankung $S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon_n$ ist. Außerdem sind Höhe und Breite von U_n kleiner als $\frac{1}{n}$.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine abzählbare unendliche Folge von ineinander geschachtelten Rechtecken U_k von folgenden Eigenschaften:

a) Auf jeder Parallelen zur y -Achse wird durch U_k ein Intervall H herausgeschnitten, in welchem $S[f, H] > \gamma - \varepsilon_k$ ist.

b) In jedem U_k gibt es einen Kurvenabschnitt $Z_k: \{\sigma_k < t < \tau_k\}$, und es ist stets Z_k ein Teil von Z_{k-1} , also $\sigma_{k-1} < \sigma_k < t < \tau_k < \tau_{k-1}$.

c) Breite und Höhe der U_k sind kleiner als $\frac{1}{k}$. Aus c) folgt, daß die U_k einen und nur einen Punkt gemeinsam haben, $P(\xi, \eta)$. Ebenso konvergieren die Z_k nach einem Punkt $t = \vartheta$. Da Z_k eine Teilmenge von U_k ist, muß $\lim Z_k = \lim U_k$ sein, d. h. es ist $P\{\xi = \varphi(\vartheta); \eta = \psi(\vartheta)\}$ ein Kurvenpunkt. In diesem Kurvenpunkt P ist nach a)

$$\omega_y[f, P] > \gamma - \varepsilon_k$$

für jedes k , also

$$\omega_y[f, P] \geq \gamma$$

im Widerspruch zu Voraussetzung 5.

§ 5.

Erster Satz über eine feste Kurve.

„Im Bereich $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ gegeben mit der Einschränkung, daß

2. in jedem Teilintervall derselben $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei;

3. überall $f(x, y)$ definiert;

4. überall $\omega_x = 0$;

5. in den Punkten von C sei $\omega_y = 0$.

Dann enthält C Punkte, in welchen $\omega = 0$ ist, und diese Punkte liegen überall dicht auf C .“

Beweis.

Der Satz folgt aus Hilfssatz VI in genau derselben Weise wie der Satz in § 2 aus Hilfssatz IV.

§ 6.

Weitere Hilfssätze.

Hilfssatz VII.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ gegeben mit der Einschränkung, daß

2. in jedem y -Intervall $\{a < x = x_r < b; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereichs es einen Punkt gebe, der nicht zu C gehört, also einen Punkt der Menge $U - C$;

3. überall $f(x, y)$ definiert;
4. in allen Punkten von $U - C$ sei $\omega_x = 0$;
5. in allen Punkten von C sei $\omega_y = 0$;
6. in jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe hat wie U , sei $S[f, U] \geq \gamma$, wo γ eine positive Konstante ist;

7. ε sei eine beliebige positive Zahl, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H_r: \{x = x_r; c < y < d\}$, in denen $S[f, H_r] < \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U .

Der Beweis verläuft ganz analog dem des Hilfssatzes II; er sei deshalb mit denselben Bezeichnungen nur skizziert.

Ist nämlich wieder zunächst $f(x, y)$ innerhalb V nach unten beschränkt: $f(x, y) \geq g$, so gibt es einen Punkt P_1 , in welchem

$$f(P_1) < g + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{I}) \text{ ist.}$$

Ist P_1 ein Punkt von $U - C$, so besitzt er nach (4) eine x -Umgebung K_1 , in welcher

$$S[f, K_1] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{IIa}) \text{ ist.}$$

Gehört er aber zu C , so besitzt er nach (5) eine y -Umgebung J_1 , in welcher

$$S[f, J_1] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{IIb}) \text{ ist,}$$

und in J_1 gibt es nach (2) einen Punkt von $U - C$, der nun nach (4) wieder eine x -Umgebung K_1 besitzt, in welcher

$$S[f, K_1] < \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{III}) \text{ ist.}$$

In beiden Fällen ist also im ganzen x -Intervall K_1

$$f(x, y) < g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{IV}).$$

Wieder wird W abgegrenzt, und darin in entsprechender Weise ein x -Intervall K_2 gefunden, in dessen Punkten

$$f(x, y) > g + \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, woraus die Existenz des Rechtecks X hervorgeht. Und mutatis mutandis läßt sich der Beweis übertragen für unbeschränktes $f(x, y)$.

Hilfssatz VIII.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ gegeben, mit den beiden Einschränkungen, daß
2. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei;
3. in jedem y -Intervall $\{a < x = x_r < b; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ innerhalb U es einen Punkt von $U - C$ gebe;
4. sei überall $f(x, y)$ definiert;
5. auf $U - C$ sei $\omega_x = 0$;
6. auf C sei $\omega_y = 0$;
7. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq \gamma$ ist, nirgends dicht auf C ."

Beweis.

Der Satz folgt unter Benutzung von Hilfssatz III und I aus Hilfssatz VII wörtlich genau wie Hilfssatz VI aus Hilfssatz V folgt, indem ein Widerspruch zu Voraussetzung (6) sich ergibt.

§ 7.

Zweiter Satz über eine feste Kurve.

„Es seien im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ die Voraussetzungen 1–6 des Hilfssatzes VIII erfüllt. Dann enthält C Punkte, in welchen $\omega = 0$ ist, und diese Punkte liegen überall dicht auf C .“

Beweis.

Folgt aus Hilfssatz VIII wie § 2 aus Hilfssatz IV.

§ 8.

Untersuchung der Kurvenbedingungen in den Sätzen der §§ 5 und 7.

Zunächst soll ein Beispiel nachweisen, daß auch hier die Bedingung, $\varphi(t)$ darf keine Konstante sein, notwendig ist.

Es sei

$$f(x, y) = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und irrationales } y,$$

$$f(x, y) = \sin 2\pi m x \quad \text{für } y = \frac{k}{m},$$

wo k und m teilerfremde ganze Zahlen sind.

Diese Funktion ist überall stetig nach x und auf den Geraden $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$ konstant gleich Null, also stetig nach y .

Auf $x = 0$ ist aber stets $\omega = 2$ (und aus Periodizitätsgründen ebenso auf $x = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$). Denn ist $P_*(0, y_1)$ irgendein Punkt der y -Achse, so gibt es innerhalb jeder Umgebung desselben zunächst ein Quadrat $U: \{|x| < \delta; |y - y_1| < \delta\}$. Zu δ läßt sich eine Primzahl p finden, für

welche $\frac{1}{p} < \frac{\delta}{2}$ ist. Es gibt somit zwei Bruchwerte $y_2 = \frac{k}{p}$ und $y_3 = \frac{k+1}{p}$, für welche $\left| \frac{k}{p} - y_1 \right| < \delta$ und $\left| \frac{k+1}{p} - y_1 \right| < \delta$ ist. Da p eine Primzahl ist, sind in einem dieser beiden Brüche Zähler und Nenner teilerfremd, etwa in $\frac{k}{p}$; und weil $\frac{1}{p} < \frac{\delta}{2}$ ist, liegen die Punkte

$$P_2 \text{ und } P_3: \left\{ \frac{1}{4p}; \frac{k}{p} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ -\frac{1}{4p}; \frac{k}{p} \right\}$$

innerhalb des Quadrates U .

Nun ist aber

$$f(P_2) = \text{Max } f(x, y) = +1$$

$$f(P_3) = \text{Min } f(x, y) = -1,$$

also in P_1 die Schwankung

$$\omega[f, P_1] = +2.$$

In § 7 tritt dazu die weitere Bedingung, daß es in jedem y -Intervall einen Punkt geben soll, der nicht zur Kurve gehört. Daß ein Teil dieser Bedingung notwendig ist, lehrt folgendes einfache Beispiel: C sei eine Kurve, welche sämtliche Punkte von U enthält, die Menge $U - C$ ist dann leer, und $f(x, y)$ braucht nirgends nach x stetig zu sein, etwa

$$f(x, y) = 0 \text{ für irrationales } x,$$

$$f(x, y) = 1 \text{ für rationales } x.$$

Überall ist $\omega_y = 0$ und überall $\omega = \omega_x = 1$.

Es fragt sich bloß noch, wie weit die Voraussetzung (3) in § 7 reicht, insbesondere ob sie in dieser allgemeinen Fassung einen Sinn hat. Das ist nur dann der Fall, wenn es stetige Kurven gibt derart, daß wenigstens auf einer Parallelen zur y -Achse die Punkte von C sowohl als auch die Punkte von $U - C$ dicht liegen, und daß gleichzeitig die Voraussetzung (2) erfüllt ist. Folgendes Beispiel zeige, daß dies möglich ist:

C soll im Quadrate $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ definiert werden. Im y -Intervall $H: \{x = 0; 0 \leq y \leq 1\}$ sei eine abzählbare dichte Menge von Punkten $P_n: \{x = 0; y = a_n\}$ gegeben; ebenso in $J: \{x = 1; 0 \leq y \leq 1\}$ die entsprechende Menge $Q_n: \{x = 1; y = a_n\}$.

Die Kurve C werde dann für $0 \leq t < 1$ so definiert: sie führe für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ in 2 linearen Stücken von P_1 über Q_1 nach P_2 , allgemein für $1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq t \leq 1 - \frac{1}{2^n}$ von P_n über Q_n nach P_{n+1} .

Es sei also

$$x = \varphi\left(1 - \frac{1-\delta}{2^{n-1}}\right) = 4\delta; \quad y = \psi\left(1 - \frac{1-\delta}{2^{n-1}}\right) = a_n \quad \text{für} \quad 0 \leq \delta \leq \frac{1}{4},$$

$$x = \varphi\left(1 - \frac{1-\vartheta}{2^{n-1}}\right) = -4\vartheta + 2; y = \psi\left(1 - \frac{1-\vartheta}{2^{n-1}}\right) = a_n + (a_{n+1} - a_n)(4\vartheta - 1) \\ \text{für } \frac{1}{4} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}.$$

Ist $K: \{x = k; 0 \leq y \leq 1\}$ irgendein das Gebiet durchsetzendes y -Intervall, so gehören alle Punkte $\{x = k; y = a_n\}$ dieses Intervalls auch zur Kurve C . Die Kurvenpunkte liegen also auf jeder Parallelen zur y -Achse dicht. Nun besteht die Kurve aus abzählbar vielen linearen Teilstücken, schneidet also jede Parallele zur y -Achse nur in abzählbar vielen Punkten, woraus folgt, daß auch die Menge $U - C$ dicht auf der Parallelen liegt.

2. Abschnitt.

Die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen.

Die Sätze und Hilfssätze dieses Abschnittes sind geradlinige Erweiterungen von jeweils entsprechenden des ersten Abschnittes. Es ist daher möglich, vieles durch Bezugnahme auf die Gedankengänge des ersten Abschnittes kürzer zu erledigen. Um den Zusammenhang der Hilfssätze in die Augen fallen zu lassen, sind sie im zweiten Abschnitt mit IIa usw. bezeichnet. Die Paragraphenzählung ist weitergeführt.

§ 9.

Erweiterung einiger Hilfssätze des § 1.

Hilfssatz IIa.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. $f(x, y)$ überall definiert;

2. überall $\omega_y \leq \beta$, wo $\beta \geq 0$ eine Konstante.

3. Ist λ eine vorgegebene positive Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereichs einen Punkt P , in dem $\omega_x[f, P] < \alpha + \lambda$ sei, wo $\alpha \geq 0$ eine Konstante.

4. In jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq a_n < x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe wie U hat, sei

$$S[f, U_n] \geq 2\alpha + 2\beta + \gamma,$$

wo γ eine positive Konstante.

5. ε sei eine beliebige positive Konstante, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H_\varepsilon: \{x = x_\varepsilon; c < y < d\}$, in denen $S[f, H_\varepsilon] \leq \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U .

Beweis.

Analog dem des Hilfssatzes II mit denselben Bezeichnungen. Ist die Funktion zunächst nach unten beschränkt, $f(x, y) \geq g$, so erhält man in V

$$f(P_1) < g + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{I}),$$

$$S[f, J_1] < \beta + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{II}),$$

$$S[f, K_1] < \alpha + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{III}),$$

also im ganzen Intervall K_1

$$f(x, y) < g + \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{IV}).$$

Innerhalb W gibt es nach (4) ein P_2 , in welchem

$$f(P_2) > g + 2\alpha + 2\beta + \gamma - \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{V})$$

ist, und man erhält weiter

$$S[f, J_2] < \beta + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{VI})$$

$$S[f, K_2] < \alpha + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{VII}),$$

woraus im ganzen Intervall K_2

$$f(x, y) > g + \alpha + \beta + \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VIII})$$

folgt. In jedem Intervall H_r des Rechtecks X ist also

$$S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon.$$

Ist aber die Funktion in keinem Teilstreifen von V nach unten beschränkt, so sei

$$f(P_1) = k \quad (\text{I})$$

und man erhält

$$S[f, J_1] < \beta + \gamma \quad (\text{II})$$

$$S[f, K_1] < \alpha + \gamma \quad (\text{III}),$$

woraus im ganzen Intervall K_1

$$f(x, y) > k - \alpha - \beta - 2\gamma \quad (\text{IV})$$

folgt. W enthält einen Punkt P_2 , in welchem

$$f(P_2) < k - 2\alpha - 2\beta - 5\gamma \quad (\text{V})$$

ist, woraus

$$S[f, J_2] < \beta + \gamma \quad (\text{VI})$$

$$S[f, K_2] < \alpha + \gamma \quad (\text{VII})$$

und im ganzen Intervall K_2

$$f(x, y) < k - \alpha - \beta - 3\gamma \quad (\text{VIII})$$

folgt. In jedem Intervall H , des Streifens X ist also

$$S[f, H_r] > \gamma.$$

Hilfssatz IVa.

„In allen Punkten des Bereiches $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. die Funktion $f(x, y)$ definiert;
2. $\omega_y \leq \beta$, wo $\beta \geq 0$ eine Konstante.
3. Ist λ eine vorgegebene positive Zahl, so gebe es in jedem y -Intervall $\{x = \text{const}; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereiches einen Punkt P , in dem $\omega_x[f, P] < \alpha + \lambda$ sei, wo α eine Konstante.
4. Es sei $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ eine beliebige stetige Kurve, die ganz im Innern von U verlaufe, mit der einzigen Einschränkung, daß
5. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte θ_1 und θ_2 gebe, für welche $\varphi(\theta_1) \geq \varphi(\theta_2)$ sei.
6. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq 2\alpha + 3\beta + \gamma$ ist, nirgends dicht auf C .

Beweis.

Es sei $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n > \dots \rightarrow 0$.

Der Satz sei falsch. Dann gibt es nach Hilfssatz III ein Kurvenstück Z , in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq 2\alpha + 3\beta + \gamma$ ist. Man gelangt dann genau wie bei Hilfssatz IV von U_{n-1} über P_n und V_n zu einem Rechteck W_n , auf welches sich Hilfssatz IIa anwenden läßt. Dieser ergibt dann ein Rechteck U_n , in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen H ,

$$S[f, H_r] > \beta + \gamma - \epsilon_n$$

ist. Die ineinander geschachtelten U_n enthalten schließlich einen Punkt P , in welchem $\omega_y[f, P] \geq \beta + \gamma$ ist, im Widerspruch zu Voraussetzung (2).

§ 10.

Verallgemeinerung des in § 2 bewiesenen Hauptsatzes.

„Im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ seien die Voraussetzungen (1–5) des Hilfssatzes IVa erfüllt.

Dann enthält C Punkte, in welchen $\omega \leq 2\alpha + 3\beta$ ist, und diese Punkte liegen überall dicht auf C . Die Abschätzung $2\alpha + 3\beta$ ist die bestmögliche.“

Beweis.

1. Ist $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 \rightarrow 0$, so liefert Hilfssatz IVa ineinandergeschachtelte Kurvenstücke $C_n: \{\sigma_n < t < \tau_n\}$, in welchen $\omega < 2\alpha + 3\beta + \gamma_n$

ist; und die C_n enthalten einen Punkt $t = \theta$, in welchem also $\omega \leq 2\alpha + 3\beta$ ist.

2. Es wird ein $f(x, y)$ gefunden werden, welches den Voraussetzungen (2) und (3) genügt und welches in allen Punkten der x -Achse die Schwankung $\omega = 2\alpha + 3\beta$ besitzt. Zu diesem Zweck seien zunächst die abzählbar vielen y -Intervalle

$$J_{n,q}: \left\{ x = \frac{2n+1}{2^q}; |y| \leq \frac{1}{2^q} \right\}$$

herausgegriffen, wo n und q beliebige positive und negative ganze Zahlen bedeuten, und aus diesen Intervallen wiederum die beiden Punktmengen

$$P_{n,q}: \left\{ x = \frac{2n+1}{2^q}; y = \frac{1}{2^{q+1}} \right\} \text{ und } R_{n,q}: \left\{ x = \frac{2n+1}{2^q}; y = -\frac{1}{2^{q+1}} \right\}.$$

Dann werde $f(x, y)$ definiert als Summe folgender drei Funktionen:

a) $f_1(x, y) = 0$ für $y \leq 0$;

$f_1(x, y) = \beta$ für $y > 0$.

b) $f_2\left(\frac{2n+1}{2^q}, y\right) = \alpha \cdot \sin 2^q \cdot \pi \cdot y$ für $|y| \leq \frac{1}{2^q}$, also in den $J_{n,q}$;

$f_2(x, y) = 0$ überall sonst.

c) $f_3(P_{n,q}) = +\beta$;

$f_3(R_{n,q}) = -\beta$;

$f_3(x, y) = 0$ überall sonst.

Für die Funktion $f(x, y) = f_1 + f_2 + f_3$ gilt dann

$\omega_y = \beta$ in den $P_{n,q}, R_{n,q}$ und auf der x -Achse,

$\omega_y = 0$ überall sonst,

$\omega_x = \alpha + \beta$ in den $P_{n,q}$ und $R_{n,q}$,

$\omega_x < \alpha$ in den anderen Punkten der $J_{n,q}$,

$\omega_x = 0$ überall sonst.

Die Bedingungen (2) und (3) sind also reichlich erfüllt. Ist aber P ein beliebiger Punkt der x -Achse, so gibt es in jeder Umgebung desselben einen Punkt der $P_{n,q}$ und einen Punkt der $R_{n,q}$. Nun ist

$$f(P_{n,q}) = \alpha + 2\beta,$$

$$f(R_{n,q}) = -(\alpha + \beta),$$

$$\text{also } \omega[f, P] = 2\alpha + 3\beta.$$

§ 11.

Erweiterung der Hilfssätze des § 4.

Hilfssatz Va.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. $f(x, y)$ überall definiert;

2. $\omega_\alpha \leq \alpha$;

3. in jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq a_n < x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe hat wie U , sei $S[f, U_n] \geq 2\alpha + \gamma$, wo γ eine positive Konstante ist.

4. ε sei eine beliebige positive Größe, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H_\varepsilon: \{x = x_\varepsilon; c < y < d\}$, in denen $S[f, H_\varepsilon] \leq \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U .

Beweis (in Anlehnung an die Bezeichnungen des Hilfssatzes V).

Die Funktion sei beschränkt nach unten in V , ihre untere Grenze sei g . Man erhält wieder

$$f(P_1) < g + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{I})$$

$$S[f, J] < \alpha + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{II}),$$

also im ganzen Intervall J

$$f(x, y) < g + \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{III})$$

In W gibt es nach (3) ein

$$f(P_2) > g + 2\alpha + \gamma - \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{IV})$$

und für K gilt

$$S[f, K] < \alpha + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{V}),$$

also im ganzen Intervall K

$$f(x, y) > g + \alpha + \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VI}).$$

III und VI ergeben, daß in jedem Intervall H_ε des Rechtecks X die Schwankung

$$S[f, H_\varepsilon] > \gamma - \varepsilon$$

ist. Ist aber $f(x, y)$ in keinem Teilstreifen von V nach unten beschränkt, so erhält man

$$f(P_1) = k \quad (\text{I})$$

$$S[f, J] < \alpha + \gamma \quad (\text{II}),$$

also überall in J :

$$f(x, y) > k - \alpha - \gamma \quad (\text{III}).$$

In W gibt es ein P_2 , so daß

$$f(P_2) < k - 2\alpha - 3\gamma \quad (\text{IV})$$

ist und es wird

$$S[f, K] < \alpha + \gamma \quad (\text{V}),$$

also überall in K :

$$f(x, y) < k - \alpha - 2\gamma \quad (\text{VI});$$

und somit in allen H_r von X

$$S[f, H_r] > \gamma.$$

Hilfssatz VIa.

„Im Bereich $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ sei

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ für $\sigma < t < \tau$ gegeben, mit der Einschränkung, daß

2. in jedem Teilintervall derselben $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei;

3. überall $f(x, y)$ definiert;

4. überall $\omega_x \leq \alpha$;

5. in den Punkten von C sei $\omega_y \leq \beta$;

6. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq 2\alpha + \beta + \gamma$ ist, nirgends dicht auf C ."

Beweis.

Es sei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \rightarrow 0$.

Der Satz sei falsch; dann gibt es nach Hilfssatz III ein Kurvenstück Z , in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq 2\alpha + \beta + \gamma$ ist. Man gelangt dann genau wie bei Hilfssatz VI von U_{n-1} und Z_{n-1} über P_n und V_n zu einem Rechteck W_n , auf welches sich Hilfssatz Va anwenden läßt. Dieser ergibt dann ein Rechteck U_n (mit einem Kurvenstück Z_n), in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen H_r

$$S[f, H_r] > \beta + \gamma - \varepsilon_n$$

ist. Die U_k konvergieren nach einem Punkt P , der wegen $U_k \supset Z_k \supset Z_{k+1}$ auch zu Z gehört. In P ist dann

$$\omega_y[f, P] \geq \beta + \gamma$$

im Widerspruch zu Voraussetzung (5).

§ 12.

Verallgemeinerung des ersten Satzes über eine feste Kurve (des § 5).

„Im Bereich $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ seien die Voraussetzungen 1 bis 5 des Hilfssatzes VIa erfüllt. Dann enthält C Punkte, in denen

$\omega \leq 2\alpha + \beta$ ist, und diese Punkte liegen überall dicht auf C . Die Abschätzung $2\alpha + \beta$ ist die bestmögliche.“

Beweis.

1. Ist $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 \rightarrow 0$, so liefert Hilfssatz VIa ineinandergeschachtelte Kurvenstücke $C_n: \{\sigma_n < t < \tau_n\}$, in welchen $\omega < 2\alpha + \beta + \gamma_n$ ist; die C_n enthalten einen Punkt $t = \theta$, in welchem also $\omega \leq 2\alpha + \beta$ ist.

2. Unter Benutzung der in § 10 aufgestellten Funktionen f_1 und f_2 sei

$$f(x, y) = f_1 + f_2$$

definiert. Für dieses $f(x, y)$ gilt

$$\omega_y = \beta \text{ auf der } x\text{-Achse,}$$

$$\omega_y = 0 \text{ überall sonst,}$$

$$\omega_x \leq \alpha \text{ in den } J_{n,q},$$

$$\omega_x = 0 \text{ überall sonst.}$$

Die Voraussetzungen (4) und (5) sind also erfüllt. Ist nun P ein beliebiger Punkt der x -Achse, so gibt es wieder in jeder Umgebung von P einen der $P_{n,q}$ und einen der $R_{n,q}$. Es ist aber

$$f(P_{n,q}) = \alpha + \beta,$$

$$f(R_{n,q}) = -\alpha,$$

woraus

$$\omega[f, P] = 2\alpha + \beta$$

folgt.

Aus diesem Satz ergibt sich ein merkwürdiges Korollar. Ist nämlich in einem Bereich U überall $\omega_x \leq \alpha$ und $\omega_y \leq \beta$, so sind für jede Kurve, welche kein der y -Achse paralleles Teilstück besitzt, die Voraussetzungen erfüllt. Es gibt also dann auf jeder derartigen Kurve Punkte, in welchen $\omega \leq 2\alpha + \beta$ ist. Besitzt aber C kein der x -Achse paralleles Teilstück, so läßt sich die Existenz von Punkten mit $\omega \leq \alpha + 2\beta$ folgern. Das Korollar lautet also:

„In allen Punkten eines Bereiches sei

1. $f(x, y)$ definiert,

2. $\omega_x \leq \alpha$,

3. $\omega_y \leq \beta$,

4. C eine stetige Kurve $\{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$, welche kein der x -Achse und kein der y -Achse paralleles Teilstück besitzt.

Dann enthält C Punkte, in denen $\omega \leq \text{Min}\{2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta\}$ ist; diese liegen auf C dicht.

Besitzt C der x -Achse parallele Teilstücke, so liegen die Punkte mit $\omega \leq 2\alpha + \beta$ auf C dicht.

Besitzt C der y -Achse parallele Teilstücke, so liegen die Punkte mit $\omega \leq \alpha + 2\beta$ auf C dicht.

Und besitzt C schließlich sowohl der x -Achse als auch der y -Achse parallele Teilstücke, so liegen die Punkte mit $\omega \leq \text{Max} \{2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta\}$ auf C dicht.“

§ 13.

Erweiterung der Hilfssätze des § 6.

Hilfssatz VIIa.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ gegeben, mit der Einschränkung, daß

2. in jedem y -Intervall $\{a < x = x_r < b; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereichs es einen Punkt gebe, der nicht zu C gehört, also einen Punkt der Menge $U - C$;

3. überall $f(x, y)$ definiert;

4. in allen Punkten von $U - C$ sei $\omega_x \leq \alpha$;

5. in allen Punkten von C sei $\omega_y \leq \beta$;

6. in jedem Teilstreifen $U_n: \{a \leq a_n < x < b_n \leq b; c < y < d\}$ von U , der dieselbe Höhe hat wie U , sei $S[f, U_n] \geq 2\alpha + 2\beta + \gamma$, wo γ eine positive Konstante ist.

7. ε sei eine beliebige positive Zahl, welche der Bedingung $0 < \varepsilon < \gamma$ genügt.

Dann liegen die y -Intervalle $H: \{x = x_r; c < y < d\}$, in denen $S[f, H] \leq \gamma - \varepsilon$ ist, nirgends dicht in U .“

Beweis in Anlehnung an den Beweis des Hilfssatzes VII.

Ist $f(x, y) \geq g$ in V nach unten beschränkt, so erhält man wieder

$$f(P_1) < g + \frac{\varepsilon}{6} \text{ (I)}.$$

Falls $P_1 < U - C$, folgt nach (4) ein K_1

$$S[f, K_1] < \alpha + \frac{\varepsilon}{6} \text{ (IIa)}.$$

Falls $P_1 < C$, folgt nach (5) ein J_1 :

$$S[f, J_1] < \beta + \frac{\varepsilon}{6} \text{ (IIb)}$$

und nach (4) ein K_1 :

$$S[f, K_1] < \alpha + \frac{\varepsilon}{6} \text{ (III)}.$$

In beiden Fällen ist also überall in K_1

$$f(x, y) < g + \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{IV}).$$

In W gibt es ein P_2 , in dem nach (6)

$$f(P_2) > g + 2\alpha + 2\beta + \gamma - \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{V})$$

ist und über

$$S[f, K_2] < \alpha + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{VIa})$$

bzw.

$$S[f, J_2] < \beta + \frac{\varepsilon}{6} \quad (\text{VIb})$$

nebst

$$S[f, K_2] < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VII})$$

folgt, daß in allen Punkten von K_2

$$f(x, y) > g + \alpha + \beta + \gamma - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VIII})$$

ist, und daraus das Rechteck X , in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen H_r

$$S[f, H_r] > \gamma - \varepsilon$$

ist. Und ganz ähnlich für nicht beschränktes $f(x, y)$; etwa analog Hilfssatz IIa.

Hilfssatz VIIIa.

„Es sei im Rechteck $U: \{a < x < b; c < y < d\}$

1. eine feste stetige Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ gegeben; mit den beiden Einschränkungen, daß

2. in jedem t -Intervall $\{\sigma \leq \sigma_n < t < \tau_n \leq \tau\}$ es zwei Werte ϑ_1 und ϑ_2 gebe, für welche $\varphi(\vartheta_1) \geq \varphi(\vartheta_2)$ sei;

3. in jedem y -Intervall $\{a < x = x_r < b; c \leq c_1 < y < d_1 \leq d\}$ des Bereiches es einen Punkt von $U - C$ gebe;

4. überall $f(x, y)$ definiert;

5. auf $U - C$ sei $\omega_x \leq \alpha$;

6. auf C sei $\omega_y \leq \beta$;

7. $\gamma > 0$ eine Konstante.

Dann liegen die Punkte, in denen $\omega \geq 2\alpha + 3\beta + \gamma$ ist, nirgends dicht auf C .“

Beweis.

Es sei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \rightarrow 0$.

Der Satz sei falsch; dann gibt es nach Hilfssatz III ein Kurvenstück Z , in dessen sämtlichen Punkten $\omega \geq 2\alpha + 3\beta + \gamma$ ist. Man gelangt wie bei Hilfssatz VIa von U_{n-1} und Z_{n-1} über P_n und V_n zu

einem Rechteck W_n , in dessen sämtlichen gleich hohen Teilstreifen $S \geq 2\alpha + 3\beta + \gamma$ ist. Auf W_n läßt sich sodann Hilfssatz VIIa anwenden, welcher ein U_n ergibt, mit einem Kurvenstück Z_n , und in dessen sämtlichen gleich hohen y -Intervallen H_r

$$S[f, H_r] > \beta + \gamma - \epsilon_n$$

ist. Die U_k konvergieren nach einem Punkt P , der wegen $U_k > Z_k > Z_{k+1}$ auch zu Z gehört. In P ist dann

$$\omega[f, P] \geq \beta + \gamma$$

im Widerspruch zu Voraussetzung (6).

§ 14.

Verallgemeinerung des zweiten Satzes über eine feste Kurve (des § 7).

„Im Bereich $U: \{a < x < b; c < y < d\}$ seien die Voraussetzungen 1–6 des Hilfssatzes VIIIa erfüllt.

Dann enthält C Punkte, in welchen $\omega \leq 2\alpha + 3\beta$ ist, und diese Punkte liegen dicht auf C .“

Beweis.

Ist $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n > \dots \rightarrow 0$, so liefert Hilfssatz VIIIa ineinandergeschachtelte Kurvenstücke $C_n: \{a_n < t < r_n\}$, in welchen $\omega < 2\alpha + 3\beta + \gamma_n$ ist; die C_n enthalten einen Punkt $t = \vartheta$, in welchem also $\omega \leq 2\alpha + 3\beta$ ist.

Anhang.

§ 15.

Beispiel einer Funktion, welche den Bedingungen des § 2 genügt, und deren Stetigkeitspunkte eine Nullmenge bilden.

Das folgende interessante Beispiel wurde mir von Herrn Carathéodory brieflich skizziert. Es sei im folgenden mit einer gewissen Vereinfachung näher ausgeführt.

In dem Intervall $H: \{0 \leq x \leq 1\}$ werde zunächst eine absteigende Folge von offenen und eine aufsteigende Folge von nirgends dichten perfekten Punktmengen folgendermaßen definiert:

Aus der Mitte von H wird herausgeschnitten das offene Intervall $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{8}$ von der Breite $\frac{1}{4}$; aus der Mitte der beiden Restintervalle je ein offenes Intervall

$$\left|x - \frac{3}{16}\right| < \frac{1}{2 \cdot 4^2} \quad \text{bzw.} \quad \left|x - \frac{13}{16}\right| < \frac{1}{2 \cdot 4^2} \quad \text{von der Breite} \quad \frac{1}{4^2}.$$

Setzt man dies Herausschneiden nach dem Cantorsche Dreiteilungs-

verfahren fort, so erhält man 2^{n-1} offene Intervalle von der Breite $\frac{1}{4^n}$. Die Vereinigungsmenge aller herausgeschnittenen Intervalle sei u_1 ; es ist $mu_1 = \frac{1}{2}$.

Ist nun $\delta_{1,r}$ ein beliebiges derartiges zu u_1 gehöriges Intervall von der Breite $\frac{1}{4^r}$, so lassen sich aus ihm in derselben Weise abzählbar viele offene Intervalle heraus schneiden. Das größte besitzt die Breite $\frac{1}{4^{r+1}}$; und es entstehen allgemein 2^{n-1} Intervalle von der Breite $\frac{1}{4^{r+n}}$. Zerlegt man auf diese Weise jedes zu u_1 gehörige $\delta_{1,r}$, so bilden die neu entstandenen Intervalle $\delta_{2,r}$ eine offene Punktmenge u_2 ; es ist $u_1 > u_2$ und $mu_2 = \frac{1}{2^2}$. Setzt man nun dieses Verfahren fort, so erhält man eine absteigende Folge von offenen Punktmengen

$$u_k > u_{k+1};$$

und es ist $u = \lim u_k$ nicht leer, weil beispielsweise der Punkt $\frac{1}{2}$ zu allen u_k gehört.

Als wichtige Eigenschaft von u_k ist noch festzustellen: sind $\delta_{k,\mu}$ und $\delta_{k,\nu}$ zwei zu u_k gehörige Intervalle von der Breite $\frac{1}{4^\mu}$ und $\frac{1}{4^\nu}$, wobei $\mu \leq \nu$ sei, und ist $\lambda > 0$ eine ganze Zahl, so gibt es zwischen $\delta_{k,\mu}$ und $\delta_{k,\nu}$ ein zu u_k gehöriges Intervall $\delta_{k,\nu+\lambda}$ von der Breite $\frac{1}{4^{\nu+\lambda}}$. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion von u_k (Haupteigenschaft von u_k).

Setzt man

$$a_k = H - u_k,$$

so erhält man wegen

$$a_k < a_{k+1}$$

eine aufsteigende Folge von perfekten, nirgends dichten Punktmengen.

Als einfache Beziehungen gelten:

$$mu_k = \frac{1}{2^k} \quad \text{und} \quad a_k \cdot u_k \text{ leer,}$$

folglich

$$ma_k = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Als wichtige Eigenschaft von a_k ist festzustellen: Ist P ein beliebiger Punkt von a_k und G eine Umgebung von P , so gibt es innerhalb G zwei Intervalle $\delta_{k,\mu}$ und $\delta_{k,\nu}$, die ganz zu u_k gehören. Dies folgt aus der Haupteigenschaft von u_k und daraus, daß a_k nirgends dicht ist. Ist nun etwa $\nu \geq \mu$, so folgt aus der Haupteigenschaft der u_k weiter, daß sich inner-

halb G für jedes $\lambda > 0$ ein zu u_k gehöriges Intervall $\delta_{k,r+\lambda}$ von der Breite $\frac{1}{4^{r+\lambda}}$ vorfindet (Haupteigenschaft von a_k).

Durch u_k ist nun im zweidimensionalen Intervall

$$J: \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$$

eine offene Punktmenge $U_k: \{x < u_k; 0 \leq y \leq 1\}$ bestimmt, welche aus abzählbar vielen Streifen $A_{k,r}$ von der Breite $\frac{1}{4^r}$ besteht, wobei $r \geq k$ ist.

Die Restmenge $A_k = J - U_k$ ist perfekt und es bestehen die Beziehungen:

$$A_k < A_{k+1}; \quad U_k > U_{k+1}; \quad A_k \cdot U_k \text{ ist leer.}$$

$$m U_k = \frac{1}{2^k}; \quad m A_k = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Setzt man $\lim A_k = A$ und $\lim U_k = U$, so ist U nicht leer, weil beispielsweise $\{x = \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq 1\}$ zu allen U_k gehört, ferner ist

$$mA = 1; \quad mU = 0.$$

Durch Parallelen zur x -Achse lassen sich aus J in ganz analoger Weise Streifen $Z_{k,r}$ herauschneiden; alle diese Streifen bilden eine offene Punktmenge V_k mit der Streifenhöhe $\frac{1}{4^{k+\lambda}}$, wo $\lambda \geq 0$ eine ganze Zahl ist. Setzt man $B_k = J - V_k$, so bestehen die Beziehungen:

$$B_k < B_{k+1}; \quad V_k > V_{k+1}; \quad B_k \cdot V_k \text{ ist leer.}$$

$$m V_k = \frac{1}{2^k}; \quad m B_k = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Setzt man ferner $\lim B_k = B$ und $\lim V_k = V$, so ist V nicht leer, und es ist außerdem

$$mB = 1; \quad mV = 0.$$

Schließlich ist noch

$$m(A_k \cdot B_k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^2,$$

somit

$$m(A \cdot B) = 1.$$

Die Menge $U_k \cdot V_k$ besteht nun aus abzählbar vielen Rechtecken und Quadraten. Die Quadrate seien mit

$$Q_{k,r} \left\{ \left| x - x_r \right| < \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}}; \left| y - y_r \right| < \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}} \right\}$$

bezeichnet; ihre Mittelpunkte (x_r, y_r) bilden eine abzählbare isolierte Menge C_k . Da jeder Streifen A_k und Z_k nur endlich viele Punkte von C_k enthält, so enthält die Menge $U_k \cdot V_k$ keinen Häufungspunkt von C_k .

Ist aber P ein beliebiger Punkt von $A_k \cdot B_k$, und R irgendeine quadratische Umgebung von P , so gibt es wegen der oben erörterten Haupteigenschaft von a_k ein festes μ derart, daß für jedes ganzzahlige λ ein Streifen $A_{k, \mu + \lambda}$ existiert, welcher das Quadrat R durchsetzt; ebenso gibt es ein festes ν derart, daß für jedes ganzzahlige λ ein Streifen $Z_{k, \nu + \lambda}$ existiert, welcher R durchsetzt. Sei nun $n > \mu$ und $n > \nu$, so kreuzen sich zwei Streifen $A_{k, n}$ und $Z_{k, n}$ ganz innerhalb R . Das von ihnen gebildete Quadrat Q und mit ihm ein Punkt von C_k liegen somit innerhalb R . Hieraus folgt aber, daß die Menge der Häufungspunkte von C_k identisch ist mit der Menge $A_k \cdot B_k$.

Nunmehr werde eine Funktionenfolge $f_k(x, y)$ folgendermaßen definiert:

In den Quadraten

$$Q_{k, r} \left\{ |x - x_r| < \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}}; |y - y_r| < \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}} \right\}$$

sei $f_k(x, y)$ eine Pyramidenfunktion mit der Höhe $\frac{1}{2^k}$; es wird also gesetzt

$$f_k \left(x_r + \frac{\xi}{4^{k+\lambda}}; y_r + \frac{\vartheta}{4^{k+\lambda}} \right) = \frac{1}{2^k} - 2^{k+1} \cdot 4^{\lambda} \cdot |\xi| \quad \text{für} \quad 0 \leq |\vartheta| \leq |\xi| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}}$$

und

$$f_k \left(x_r + \frac{\xi}{4^{k+\lambda}}; y_r + \frac{\vartheta}{4^{k+\lambda}} \right) = \frac{1}{2^k} - 2^{k+1} \cdot 4^{\lambda} \cdot |\vartheta| \quad \text{für} \quad 0 \leq |\xi| \leq |\vartheta| \leq \frac{1}{2 \cdot 4^{k+\lambda}}.$$

In allen anderen Punkten, also insbesondere in $A_k \perp B_k$ sei

$$f_k(x, y) = 0.$$

Die so definierte Funktion $f_k(x, y)$ ist überall stetig nach x und y . Denn eine Parallele zur x -Achse gehört entweder ganz zu B_k , dann ist auf ihr $f_k(x, y)$ konstant gleich Null. Oder sie liegt im Inneren eines Streifens $Z_{k, r}$. Da zu $Z_{k, r}$ nur endlich viele Quadrate Q gehören, so schneidet $y = c$ nur endlich viele Pyramiden; es ist somit $f(x, c)$ eine stetige, stückweise lineare Funktion von x . Und analog verläuft der Nachweis, daß überall Stetigkeit nach y herrscht.

Weil jeder Streifen $A_{k, r}$ und $Z_{k, r}$ nur endlich viele Pyramiden trägt, ist ferner $f_k(x, y)$ im Inneren jedes Streifens A und Z zweidimensional stetig, d. h. aber es ist stetig in den Punkten von $U_k \perp V_k$.

Und schließlich ist $f_k(x, y)$ unstetig auf $A_k \cdot B_k$. Denn ist P ein beliebiger Punkt von $A_k \cdot B_k$, so ist $f(P) = 0$. In jeder Umgebung von P aber gibt es einen Punkt P_1 von C_k , für welchen $f(P_1) = \frac{1}{2^k}$ ist. Es ist somit $\omega[f_k, P] = \frac{1}{2^k}$.

Nach dieser Vorarbeit werde

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x, y)$$

gesetzt. Die Reihe konvergiert gleichmäßig im ganzen Intervall J , woraus folgt, daß $f(x, y)$ überall in J stetig nach x und y ist, und zweidimensional stetig in allen Punkten von $U \perp V$.

Ist aber P ein Punkt von $A \cdot B$, so gibt es ein kleinstes $k = k_0$ derart, daß P zu $A_{k_0} \cdot B_{k_0}$ gehört. Dann ist zunächst $\sum_{k=1}^{k_0-1} f_k(x, y)$ stetig im Punkte P . Ferner ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(P) = 0$. Ist schließlich P_1 ein beliebiger Punkt von C_{k_0} , so ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(P_1) \geq \frac{1}{2k_0}$, weil $f_{k_0}(P_1) = \frac{1}{2k_0}$ ist. Nun ist P Häufungspunkt von C_{k_0} , woraus folgt, daß $\omega[f, P] \geq \frac{1}{2k_0}$ ist. $f(x, y)$ ist somit überall unstetig auf $A \cdot B$; die Menge $U \perp V$ seiner Stetigkeitspunkte hat den Inhalt Null. Nimmt man dieses Ergebnis zusammen mit dem Satz des § 2, so ergibt sich die Merkwürdigkeit, daß $U \perp V$ eine zweidimensionale Nullmenge darstellt, die auf jeder stetigen Kurve $C: \{x = \varphi(t); y = \psi(t)\}$ überall dicht liegt.

Köslin, den 30. November 1919.

(Angenommen Dezember 1919.)

Über fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen.

Von

J. Nielsen in Hamburg.

Brouwer hat zu wiederholten Malen¹⁾ den Satz bewiesen, daß eine eineindeutige und stetige oder, wie Brouwer kurz sagt, „topologische“ Abbildung einer Kugelfläche auf sich selbst mit Erhaltung der Indikatrix mindestens einen Punkt fest läßt. In einer kürzlich publizierten Note²⁾ weist Brouwer nach, daß diese Eigenschaft, bei allen topologischen Abbildungen mit Erhaltung der Indikatrix mindestens einen Fixpunkt zu ergeben, unter allen geschlossenen zweiseitigen Flächen allein denjenigen vom Typus der Kugel zukommt, während topologische Abbildungen ohne Fixpunkt mit Umkehrung der Indikatrix bei jeder geschlossenen zweiseitigen Fläche möglich sind.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß die von Brouwer in der letzteren Note angewandte Methode, wenn man statt mit aufgesetzten Henkeln mit aufgesetzten Möbiusschen Bändern operiert, für die einseitigen Flächen ein analoges Resultat in einheitlicher Weise liefert; aus diesem folgt sodann der Brouwersche Satz für die zweiseitigen Flächen, indem man dieselben zwei-eindeutig auf einseitige Flächen abbildet. Dieses Übertragungsprinzip verwendet auch Brouwer, um zu zeigen, daß bei jeder topologischen Abbildung der projektiven Ebene auf sich mindestens ein Punkt fest bleibt³⁾.

¹⁾ Zuerst Amsterdamer Berichte 17 2, S. 741 ff. (holländ. Ausg.). Der einfachste Brouwersche Beweis wurde von Hadamard in der zweiten Auflage der „Introduction à la théorie des fonctions“ von Tannery mitgeteilt. Einen weiteren einfachen Beweis gibt neuerdings B. v. Kérékjártó in den Math. Ann. 80, S. 30–32.

²⁾ Sur les points invariants des transformations topologiques des surfaces. Comptes rendus 168, S. 1842 (26. Mai 1919).

³⁾ Amsterdamer Berichte 17 2, S. 752.

§ 1.

Zur topologischen Definition einer Fläche dient die Charakteristik

$$K = 2p + k + r - 2.$$

Dabei bedeutet r die Anzahl der Randkurven, ferner k die Anzahl der einrandigen und p die Anzahl der zweirandigen Rückkehrschnitte, welche keinen Punkt untereinander oder mit den Randkurven gemeinsam haben, und nach deren Ausführung die Fläche auf einen schlichten Bereich der Ebene ausgebreitet werden kann (Maximalzahlen nicht zerstückelnder Schnitte.) Bei geschlossenen Flächen, wie sie im Folgenden allein betrachtet werden, ist $r = 0$, bei zweiseitigen $k = 0$ und also bei zweiseitigen geschlossenen K gerade. Bei einseitigen Flächen kann man je zwei einrandige durch einen zweirandigen Rückkehrschnitt ersetzen, so daß die Verteilung der Einheiten von K auf $2p$ und k nicht fest ist. Die Anzahlen r und K und die Eigenschaft der Zweiseitigkeit bzw. Einseitigkeit genügen zur topologischen Charakterisierung der Fläche.

Auf einer Kugelfläche F bedeute $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq +\frac{\pi}{2}$ die geographische Breite und $\varphi \pmod{2\pi}$ die geographische Länge. F hat die Charakteristik $K(F) = -2$. $n \geq 2$ sei eine ganze Zahl. Um den Punkt $\psi = 0$, $\varphi = 0$ schlage man auf F einen Kreis κ_0 mit einem Radius, der einer Winkelöffnung $< \frac{\pi}{n}$ entspricht, und schneide das Innere desselben aus F aus. Das so entstehende Loch schließe man wieder, indem man den Randkreis mit der Randkurve einer gelochten Boyschen Fläche, also eines Möbiusschen Bandes B_0 , Punkt für Punkt vereinigt. Die so entstehende geschlossene Fläche F_1 besitzt einen vom Möbiusschen Bande herrührenden einrandigen Rückkehrschnitt und also die Charakteristik $K(F_1) = -1$. Den gleichen Prozeß führe man an den Punkten $\psi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{n}$, ..., $(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ aus. Von den dabei verwendeten Kreisen $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ haben nach der Wahl des Radius nie zwei einen gemeinsamen Punkt. Die so entstehende Fläche F_n hat n einrandige Rückkehrschnitte, also $K(F_n) = n - 2$. Nun unterwerfe man zunächst den Teil von F_n , der aus Punkten der ursprünglichen Kugelfläche F besteht, der Abbildung $\psi' = -\psi$, $\varphi' = \varphi + \frac{2\pi}{n}$. Diese hat keinen Fixpunkt, und durch sie wird κ_0 auf κ_1 , κ_1 auf κ_2 usw., endlich κ_{n-1} auf κ_0 abgebildet. Diese Abbildung setze man stetig auf die schließenden Möbiusschen Bänder fort, indem man B_0 auf B_1 , B_1 auf B_2 , ..., B_{n-1} auf B_0 umkehrbar eindeutig abbildet. Die einseitige Fläche F_n , für die $K(F_n) = n - 2 \geq 0$ ist, ist also einer topologischen Abbildung auf sich ohne Fixpunkt unterworfen worden.

§ 2.

Faßt man die beiden Seiten, die man in der Umgebung jeder Stelle auf der einseitigen Fläche F_n unterscheiden kann, als getrennte, übereinander liegende Blätter auf, so schließen sie sich zu einer geschlossenen zweiseitigen Fläche F_n^* zusammen⁴⁾. Diese hat die Charakteristik $K(F_n^*) = 2K(F_n)^5)$. Jedem Punkte P von F_n entsprechen übereinanderliegende Punkte P_1 und P_2 von F_n^* , dem Bildpunkt P' von P die übereinanderliegenden Punkte P'_1 und P'_2 . Durch die Festsetzung, daß für einen bestimmten Punkt Q von F_n der Punkt Q_1 von F_n^* dem Punkte Q'_1 zugeordnet wird, ist bei stetiger Fortsetzung aus der topologischen Abbildung von F_n auf sich eine ebensolche von F_n^* auf sich bestimmt. Eine zweite aber wird dadurch bestimmt, daß Q_1 dem Punkte Q'_2 zugeordnet wird. Und zwar ist die eine dieser Abbildungen von F_n^* auf sich eine solche mit Erhaltung der Indikatrix, die andere eine solche mit Umkehrung der Indikatrix. Denn eine Indikatrix in Q_1 überträgt sich auf zwei sich deckende Indikatrizes in Q'_1 und Q'_2 . Diese entsprechen aber verschiedenen Indikatrizes von F_n^* , da sich eine Indikatrix auf F_n längs eines Q'_1 mit Q'_2 verbindenden Weges (von dem einen ins andere Blatt) umkehrt. Ein Fixpunkt bei einer dieser beiden Abbildungen von F_n^* müßte auch ein Fixpunkt bei der Abbildung von F_n sein, kann also nicht existieren. F_n^* besitzt also topologische Abbildungen auf sich ohne Fixpunkte, sowohl mit Erhaltung als auch mit Umkehrung der Indikatrix. Dabei ist für $n = 2, 3, 4, \dots$ die Charakteristik $K(F_n^*) = 2K(F_n) = 2(n-2) = 0, 2, 4, \dots$

Es fehlt noch die zweiseitige Fläche der Charakteristik -2 . Ersetzt man auf der Kugel jeden Punkt durch den diametral gegenüberliegenden, so hat diese die Indikatrix umkehrende Abbildung keinen Fixpunkt.

Friedrichshof, im August 1919.

⁴⁾ Dies ist die Kleinsche Auffassung der einseitigen Fläche als „Doppelfläche“. Vgl. auch W. Boy, Math. Ann. 57.

⁵⁾ Vgl. Boy, l. c.

(Angenommen September 1919).

Über ganze transzendente Funktionen mit reellen Nullstellen.

Von

N. Kritikós in Konstantinopel.

Einleitung.

Ein altes Problem der Algebra, welches um die Mitte des vorigen Jahrhunderts seine Lösung gefunden hat, bestand darin, zu entscheiden, ob eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten durchweg reelle Wurzeln besitzt oder nicht. Das Kriterium dafür kann bekanntlich folgendermaßen formuliert werden.

Es sei $g(x)$ ein reelles Polynom vom Grade $n \geq 1$, das im Nullpunkte $x = 0$ nicht verschwindet, und man bezeichne mit s_k für $k = 0, 1, 2, \dots$, die Summe der $-k$ -ten Potenzen seiner Wurzeln, wonach um $x = 0$ die Gleichung gilt:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -s_1 - s_2 x - s_3 x^2 - \dots;$$

damit $g(x)$ lauter reelle, einfache Wurzeln besitze, ist notwendig und hinreichend, daß seine Koeffizienten folgenden n Ungleichungen genügen:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-2} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses Resultat hat Herr J. Grommer in seiner Göttinger Dissertation¹⁾ auf ganze transzendente Funktionen endlichen Geschlechts übertragen, indem er u. a. folgenden schönen Satz bewies:

Grommerscher Satz: Es sei $g(x)$ eine reelle ganze transzendente Funktion, $g(0) \neq 0$, und es werde

¹⁾ Siehe Journal für die reine und angewandte Mathematik 144, S. 114.

$$(1) \quad \frac{g'(x)}{g(x)} = -s_1 - s_2 x - s_3 x^2 \dots$$

gesetzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $g(x)$ unendlich viele, durchweg reelle Nullstellen hat und zugleich bis auf einen Faktor $e^{-\gamma x^{2m}}$ ($\gamma \geq 0$) vom Geschlecht $\leq 2m-1$ ($m \geq 1$) ist, besteht in folgenden unendlich vielen Ungleichungen:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} s_{2m} & s_{2m+1} & \dots & s_{2m+k-1} \\ s_{2m+1} & s_{2m+2} & \dots & s_{2m+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{2m+k-1} & s_{2m+k} & \dots & s_{2m+2k-2} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Man kann dies auch so aussprechen: Die notwendige und hinreichende Bedingung besteht darin, daß die quadratische Form

$$(F_r) \quad \sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k$$

der $r+1$ Variablen u_0, u_1, \dots, u_r für alle $r \geq 0$ positiv definit ist.

Herr Grommer verfährt beim Beweise folgendermaßen: Er geht von der Kettenbruchentwicklung aus, welche²⁾ der Potenzreihe

$$s_{2m} z^{-1} + s_{2m+1} z^{-2} + \dots + s_{2m+k} z^{-(k+1)} + \dots$$

entspricht, konstruiert aus der Reihe ihrer Näherungsbrüche eine Folge von rationalen Funktionen, die $\frac{g'(x)}{g(x)}$ approximieren, und stellt sie durch Stieltjesche Integrale dar. Unter diesen trifft er nach dem Hilbertschen Diagonalverfahren eine Auswahl, von der er nachweisen kann, daß sie gegen ein Stieltjesches Integral konvergiert. Dieses Integral stellt somit $\frac{g'(x)}{g(x)}$ dar und aus dieser Darstellung läßt sich der oben angegebene Satz leicht ableiten.

Sofern man nun zum allgemeinsten Resultat der Grommerschen Arbeit gelangen will, scheint die angedeutete Methode unumgänglich zu sein. Beschränkt man sich aber nur auf den formulierten Satz, den man wohl für das schönste Ergebnis der sinnreichen Untersuchung halten kann, so läßt sich ein wesentlich einfacherer Weg beim Beweise einschlagen, der ohne Integraldarstellung und Auswahlverfahren zum Ziele führt. Die Notwendigkeit der Bedingung (2) leuchtet nämlich sofort ein, und was ihre Hinlänglichkeit betrifft, so kann man zunächst mit Hilfe der approximierenden rationalen Funktionen die Realität der Nullstellen von $g(x)$ und eine obere Schranke $2m$ für das Geschlecht nachweisen; dadurch wird

²⁾ Siehe C. Jordan, Cours d'Analyse I (3. édit.), S. 375.

es dann möglich, den übrigen Teil der Behauptung durch elementare Schlüsse zu erledigen. Auf diesen Gedanken machte mich Herr Dr. G. Pólya aufmerksam, und seiner freundlichen Anregung folgend, befaßte ich mich mit der Untersuchung, deren Ergebnisse den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden.

§ 1.

Beweis der Notwendigkeit.

Wir beginnen mit dem Nachweis der Notwendigkeit.

Es sei also $g(x)$ ($g(0) \neq 0$) eine reelle ganze transzendente Funktion mit unendlich vielen, durchweg reellen Nullstellen; sie sei ferner gleich dem Produkte einer ganzen Funktion vom Geschlecht $\leq 2m-1$ und der Funktion $e^{-\gamma x^{2m}}$, wobei $\gamma \geq 0$. Es ist dann zu zeigen, daß die quadratische Form

$$(F_r) \quad \sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k$$

für jedes $r \geq 0$ positiv definit ist.

Beweis. Die gemachten Voraussetzungen lassen sich in folgende Formel zusammenfassen:

$$(3) \quad g(x) = e^{P(x) - \gamma x^{2m}} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_v}\right) e^{\frac{x}{\alpha_v} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\alpha_v^{2m-1}}};$$

dabei ist $P(x)$ ein Polynom vom Grade $\leq 2m-1$, α_v reell und $\sum_{v=1}^n \frac{1}{\alpha_v^{2m}}$ konvergent. Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned} -\frac{g'(x)}{g(x)} &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1} = -P'(x) + 2m\gamma x^{2m-1} + \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_v - x} - \frac{1}{\alpha_v} - \frac{x}{\alpha_v^2} - \dots - \frac{x^{2m-2}}{\alpha_v^{2m-1}} \right) \\ &= -P'(x) + 2m\gamma x^{2m-1} + \sum_{v=1}^n \left(\frac{x^{2m-1}}{\alpha_v^{2m}} + \frac{x^{2m}}{\alpha_v^{2m+1}} + \dots \right), \end{aligned}$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung sich ergibt:

$$s_{2m} = 2m\gamma + \sum_{v=1}^n \frac{1}{\alpha_v^{2m}},$$

$$s_n = \sum_{v=1}^n \frac{1}{\alpha_v^n} \quad \text{für } n \geq 2m+1.$$

Somit gilt

$$\sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{v=1}^n \left(\sum_{i,k=0}^r \frac{u_i u_k}{\alpha_v^{2m+i+k}} \right),$$

$$(4) \quad \sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = 2m \gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left(u_0 + \frac{u_1}{\alpha_r} + \dots + \frac{u_r}{\alpha_r^r} \right)^2.$$

Die rechte Seite dieser letzten Formel ist für alle reellen Werte der Variablen u_0, u_1, \dots, u_r als Summe von nicht-negativen Zahlen selbst ≥ 0 . Ist sie für ein spezielles Wertesystem $u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_r^{(0)}$ gleich Null, so muß

$$f_r\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

sein, unter $f_r(x)$ das Polynom

$$f_r(x) = u_0^{(0)} + u_1^{(0)}x + \dots + u_r^{(0)}x^r$$

verstanden. Nun gibt es in der Wertfolge

$$x = \frac{1}{\alpha_r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

nach Voraussetzung unendlich viele verschiedene Werte. Das Polynom $f_r(x)$ verschwindet also für unendlich viele verschiedene Werte x , folglich verschwindet es identisch, und das Wertesystem $(u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_r^{(0)})$, welches die Form (F_r) zu Null machen soll, ist kein anderes als $(0, 0, \dots, 0)$; d. h. aber: (F_r) ist positiv definit, w. z. b. w.

Bemerkung. Indem man das Bewiesene auf die meromorphe Funktion $\frac{g'(x)}{g(x)}$ bezieht und überlegt, auf welche ihrer Eigenschaften es beim Beweise ankommt, gelangt man sofort zu folgendem Ergebnis:

$$\text{Ist} \quad f(x) = -s_1 - s_2 x - s_3 x^2 - \dots$$

eine reelle, im Nullpunkte reguläre meromorphe Funktion mit unendlich vielen reellen Polen und positiven Residuen, welche eine Mittag-Leffler'sche Partialbruchdarstellung

$$-f(x) = cx^{2m-1} + c_1 x^{2m-2} + \dots + c_{2m-1} + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left(\frac{1}{\alpha_r - x} - \frac{1}{\alpha_r} - \dots - \frac{x^{2m-2}}{\alpha_r^{2m-1}} \right)$$

($c \geq 0$), besitzt, so ist die quadratische Form (F_r) für alle $r \geq 0$ positiv definit.

Dieselbe Schlußweise ergibt weiter: Hat $f(x)$ nur endlich viele Pole, d. h. ist $f(x)$ eine rationale Funktion der Gestalt $-f(x) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r}{\alpha_r - x}$, wobei $A_r > 0$ und α_r reell und $\neq 0$, so ist die Form (F_r) , in der man $m = 0$ und $s_{2m} = s_0 = N$ zu machen hat, nicht mehr positiv definit, wohl aber positiv definit oder semi-definit für alle $r \geq 0$.

Zwei analoge Resultate erhält man selbstverständlich, wenn man an Stelle von $x = 0$ den Punkt $x = \infty$ als regulären Punkt für $f(x)$ vor-

aussetzt. Wir wollen dasjenige anführen, welches sich auf ein rationales $f(x)$ bezieht, weil es eine von uns weiter unten benötigte Folgerung liefert.

Satz: Es sei

$$f(z) = \sum_{v=1}^N \frac{A_v}{z - \alpha_v}$$

eine rationale Funktion mit reellen Polen und positiven Residuen; sie habe um $z = \infty$ die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k z^{-(k+1)}.$$

Es ist dann für alle $r \geq 0$ die quadratische Form

$$\sum_{i,k=0}^r t_{i+k} u_i u_k$$

positiv definit oder semi-definit.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes gelten für die t_k die Relationen

$$t_{2k} \geq 0, \quad t_{2k} t_{2k+2} - t_{2k+1}^2 \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem positiv definiten oder semi-definiten Charakter der quadratischen Form $\sum_{i,k=0}^r t_{i+k} u_i u_k$.

§ 2.

Elementarer Teil des Beweises der Hinlänglichkeit.

Wir gehen jetzt dazu über, die Hinlänglichkeit der Bedingung (2) darzutun. Einen Teil dieser Aufgabe können wir, wie angedeutet, durch einfache, vorwiegend algebraische Betrachtungen erledigen, und das wollen wir in diesem Paragraphen vorwegnehmen.

Wir setzen voraus, die reelle ganze transzendente Funktion $g(x)$ ($g(0) \neq 0$) genüge den Bedingungen (2), so daß die Form (F_r) positiv definit ist. Überdies nehmen wir an, daß $g(x)$ durchweg reelle Nullstellen α_v und ein endliches Geschlecht $\leq 2m$ (wobei $m \geq 1$) besitzt. Dann behaupten wir folgendes:

1. Die Nullstellen von $g(x)$ sind in unendlicher Anzahl vorhanden.
2. Die Summe $\sum_v \frac{1}{\alpha_v^{2m}}$ ihrer $-2m$ -ten Potenzen ist konvergent.
3. Wenn der Exponentialfaktor von $g(x)$ das Geschlecht $2m$ erreicht, dann ist der höchste Koeffizient des Polynoms im Exponenten negativ.

Beweis. 1. Unseren Voraussetzungen gemäß läßt sich $g(x)$ folgendermaßen darstellen:

$$(3') \quad g(x) = e^{P(x) - \gamma x^{2m}} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r} + \dots + \frac{x^{2m}}{2m \alpha_r^{2m}}};$$

dabei ist $P(x)$ ein Polynom vom Grade $\leq 2m-1$ und γ eine reelle Konstante. Wir schließen daraus:

$$-\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1} x^k = -P'(x) + 2m\gamma x^{2m-1} + \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{x^{2m}}{\alpha_r^{2m+1}} + \frac{x^{2m+1}}{\alpha_r^{2m+2}} + \dots \right\}$$

und durch Koeffizientenvergleichung:

$$s_{2m} = 2m\gamma, \quad s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\alpha_r^n} \quad \text{für } n \geq 2m+1.$$

Somit gilt

$$(4') \quad \sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^n \sum_{i,k=0}^{r'} \frac{u_i u_k}{\alpha_r^{2m+i+k}} \\ = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left\{ \left(u_0 + \frac{u_1}{\alpha_r} + \dots + \frac{u_r}{\alpha_r^r} \right)^2 - u_0^2 \right\}.$$

Wäre nun die Anzahl der Nullstellen endlich, etwa gleich $N \geq 0$, so bekämen wir für $u_0 = 0$

$$\sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = \sum_{i,k=1}^r s_{2m+i+k} u_i u_k \begin{cases} = 0, & \text{falls } N=0 \\ = \sum_{r=1}^N \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left(\frac{u_1}{\alpha_r} + \dots + \frac{u_r}{\alpha_r^r} \right)^2, & \text{falls } N \geq 1, \end{cases}$$

und hieraus leuchtet sofort ein, daß, sobald $r > N$ angenommen wird, sicher Wertssysteme

$$(u_1, u_2, \dots, u_r) + (0, 0, \dots, 0)$$

gefunden werden können, für welche die quadratische Form (F_r) verschwindet. Dieselbe wäre also nicht definit, in Widerspruch mit unserer Voraussetzung.

2. $g(x)$ besitzt demnach unendlich viele Nullstellen; wir denken sie uns nach monoton wachsendem absolutem Betrage numeriert und schreiben unsere Formel (4') wieder hin:

$$\sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left\{ \left(u_0 + \frac{u_1}{\alpha_r} + \dots + \frac{u_r}{\alpha_r^r} \right)^2 - u_0^2 \right\} \\ = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left\{ f_r^2 \left(\frac{1}{\alpha_r} \right) - u_0^2 \right\},$$

unter $f_r(x)$ das Polynom

$$(5) \quad f_r(x) = u_0 + u_1 x + \dots + u_r x^r$$

verstanden. Wir wählen jetzt das Wertsystem (u_0, u_1, \dots, u_r) derart, daß

$$(6) \quad f_r(x) \equiv (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \dots (1 - \alpha_r x)$$

wird. Dann gilt

$$u_0 = 1,$$

$$f_r\left(\frac{1}{\alpha_1}\right) = f_r\left(\frac{1}{\alpha_2}\right) = \dots = f_r\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) = 0$$

und für $r \geq r+1$

$$f_r\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_r}\right)\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_r}{\alpha_r}\right),$$

also

$$(7) \quad 0 \leq f_r\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) < 1.$$

Die quadratische Form (F_r) erhält für dieses Wertsystem der u den Wert

$$2m\gamma - \sum_{r=1}^r \frac{1}{\alpha_r^{2m}} + \sum_{r=r+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} \left\{ f_r^2\left(\frac{1}{\alpha_r}\right) - 1 \right\}.$$

In diesem Ausdruck ist die letzte Summe wegen (7) etwas Negatives, also ist der Wert der Form (F_r)

$$(8) \quad < 2m\gamma - \sum_{r=1}^r \frac{1}{\alpha_r^{2m}}.$$

Wäre nun die Summe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}}$$

divergent, so wäre für hinreichend große r obige Größe (8) etwas Negatives und die Form (F_r) entgegen unserer Annahme negativer Werte fähig.

Also muß $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}}$ konvergent sein.

3. Gestützt auf das Vorangehende können wir jetzt der Produktdarstellung unserer ganzen Funktion $g(x)$ die Gestalt

$$(3) \quad g(x) = e^{P(x) - \gamma x^{2m}} \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r} + \dots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\alpha_r^{2m-1}}}$$

geben, wobei natürlich die reelle Konstante γ einen andern Wert hat als in (3'). Für die Form (F_r) gilt nun genau wie in § 1 die Gleichung

$$(4) \quad \sum_{i,k=0}^r s_{2m+i+k} u_i u_k = 2m\gamma u_0^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} f_r^2\left(\frac{1}{\alpha_r}\right),$$

unter $f_r(x)$ das Polynom (5) verstanden. Hierin setzen wir für (u_0, u_1, \dots, u_r) das oben durch (6) definierte spezielle Wertsystem ein und bekommen als entsprechenden Wert der positiv definiten Form (F_r) die positive Größe

$$2m\gamma + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}} f_r^2\left(\frac{1}{\alpha_r}\right).$$

Diese Größe hängt natürlich von r ab; sie strebt für $r = +\infty$, da nach (7) $\left|f_r\left(\frac{1}{\alpha_r}\right)\right| < 1$ und $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_r^{2m}}$ konvergent ist, gegen den Limes $2m\gamma$.

Folglich ist dieser Limes ≥ 0 , woraus $\gamma \geq 0$, w. z. b. w.

Damit haben wir unser erstes Ziel erreicht, und es ist jetzt klar, daß wir unsere Aufgabe vollständig gelöst haben werden, sobald wir zeigen, daß eine reelle ganze transzendente Funktion $g(x)$ ($g(0) \neq 0$), welche die Bedingungen (2) erfüllt, notwendig lauter reelle Nullstellen und ein Geschlecht $\leq 2m$ hat. Zu dem Ende reichen die in diesem Paragraphen angewandten elementaren Überlegungen freilich nicht aus. Wir müssen, mit Herrn Grommer, $\frac{g'(x)}{g(x)}$ durch eine Folge rationaler Funktionen annähern. Wir haben uns daher im folgenden zunächst mit der Definition und der Besprechung der Eigenschaften dieser rationalen Funktionen zu beschäftigen; dabei werden wir bestrebt sein, der Untersuchung neue Seiten abzugewinnen.

§ 3.

Näherungsbrüche von Potenzreihen.

Wir gehen von einer beliebigen Potenzreihe mit reellen Koeffizienten

$$(9) \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{t_0}{x} + \frac{t_1}{x^2} + \dots + \frac{t_k}{x^{k+1}} + \dots$$

aus, für die nur folgende unendlich viele Ungleichungen gelten:

$$(10) \quad T_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} \end{vmatrix} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

und die für $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ nicht zu konvergieren braucht. Wir ordnen ihr eine Folge von rationalen Funktionen

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

nach Maßgabe folgender drei Bedingungen zu:

1. $P_n(x)$ ist ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades und von der Form

$$P_n(x) = t_0 x^{n-1} + p_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \dots + p_0^{(n)}.$$

und (14) augenscheinlich auch hinreichend; die in Aussicht gestellte Zuordnung ist also möglich, und die angeführten drei Forderungen legen sie eindeutig fest. Unsere auf diese Weise definierten rationalen Funktionen sind reell und haben um $z = \infty$ die Entwicklung

$$(11) \quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k^{(n)}}{z^{k+1}} = \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \dots + \frac{t_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{t_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \dots$$

Zur Ermittlung des Wertes von $t_{2n}^{(n)}$ vergleichen wir in der formalen Identität (12) die beiderseitigen Koeffizienten von z^{-n-1} ; wir erhalten so die Gleichung

$$q_0 t_n + q_1 t_{n+1} + \dots + q_{n-1} t_{2n-1} + t_{2n} = t_{2n} - t_{2n}^{(n)},$$

die wir mit den n Gleichungen (13) vereinigen, um aus ihnen die n Größen q_0, \dots, q_{n-1} zu eliminieren. Dies ergibt die Relation

$$\begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n & t_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} & t_{2n-1} \\ t_n & t_{n+1} & \dots & t_{2n-1} & t_{2n} - (t_{2n} - t_{2n}^{(n)}) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$T_{n+1} - (t_{2n} - t_{2n}^{(n)}) T_n = 0,$$

woraus

$$(15) \quad t_{2n} - t_{2n}^{(n)} = \frac{T_{n+1}}{T_n} > 0.$$

Die Übereinstimmung zwischen $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ und der Entwicklung (11) von $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ hört also beim $(2n+1)$ -ten Glied auf.

Wir entwickeln nun eine Reihe von Folgerungen.

I. Nach Definition gilt für $n \geq 1$

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{t_{2n} - t_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \dots,$$

mithin

$$P_{n+1}(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_{n+1}(z) = (t_{2n} - t_{2n}^{(n)}) \frac{c}{z} + \dots$$

woraus sich die für das folgende fundamentale Formel

$$(16) \quad P_{n+1}(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_{n+1}(z) = t_{2n} - t_{2n}^{(n)} = \frac{T_{n+1}}{T_n}$$

ergibt. Wegen $\frac{T_{n+1}}{T_n} \neq 0$ folgt aus ihr insbesondere, daß $P_{n+1}(z)$ zu $P_n(z)$ und $Q_{n+1}(z)$, $Q_n(z)$ zu $P_n(z)$ und $Q_{n+1}(z)$ relativ prim ist.

Wir bemerken beiläufig, daß aus (16) sehr leicht Rekursionsformeln für die $P_n(z)$ und $Q_n(z)$ gewonnen werden können, die erkennen lassen,

daß unsere $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ die Näherungsbrüche eines unendlichen Kettenbruches sind, nämlich des Kettenbruches, welcher der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ entspricht²⁾.

II. Wir stellen jetzt folgende Behauptung auf:

$Q_n(z)$ hat n reelle, verschiedene Wurzeln

$$\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,n}.$$

und es gilt

$$\text{sign } Q'_n(\xi_{n,\nu}) = \text{sign } P_n(\xi_{n,\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Mit Rücksicht darauf, daß alle unsere Polynome $P_n(z)$ und $Q_n(z)$ nach Konstruktion positive höchste Koeffizienten haben, ist der zweite Teil der Behauptung gleichbedeutend mit folgender Aussage: das Polynom $P_n(z)$ besitzt, genau wie das Polynom $Q'_n(z)$, $n-1$ reelle, verschiedene Wurzeln, welche diejenigen des $Q_n(z)$ trennen.

Den Beweis wollen wir durch vollständige Induktion erbringen. Zunächst ist unsere Behauptung für $n=1$ richtig; denn es ist

$$P_1(z) = t_0, \quad Q_1(z) = z - \frac{t_1}{t_0},$$

also hat $Q_1(z)$ eine reelle Wurzel $\frac{t_1}{t_0} = \xi_{1,1}$, und es gilt

$$\text{sign } Q'_1(\xi_{1,1}) = \text{sign } P_1(\xi_{1,1}) = +1.$$

Nehmen wir zweitens an, das Behauptete treffe für irgendeinen Index n zu. Es ist dann

$$(17) \quad P_n(\xi_{n,n}) > 0, \quad P_n(\xi_{n,n-1}) < 0, \quad \dots, \quad \text{sign } P_n(\xi_{n,1}) = (-1)^{n+1}.$$

Andererseits erhalten wir durch Einsetzen von $z = \xi_{n,\nu}$ in die Fundamentalformel (16):

$$-P_n(\xi_{n,\nu}) Q_{n+1}(\xi_{n,\nu}) = \frac{T_{n+1}}{T_n} > 0 \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Folglich muß $Q_{n+1}(z)$ mindestens eine Wurzel in jedem der $n-1$ Intervalle

$$\xi_{n,1} < z < \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n-1} < z < \xi_{n,n}$$

haben. Ferner ist nach der ersten Ungleichung (17)

$$Q_{n+1}(\xi_{n,n}) = -\frac{T_{n+1}}{T_n P_n(\xi_{n,n})} < 0,$$

also muß $Q_{n+1}(z)$, das ja für $z = +\infty$ positiv ist, mindestens eine Wurzel oberhalb $\xi_{n,n}$ besitzen. Schließlich haben wir wegen der letzten Relation (17)

$$\text{sign } Q_{n+1}(\xi_{n,1}) = \text{sign} \left(-\frac{T_{n+1}}{T_n P_n(\xi_{n,1})} \right) = (-1)^n,$$

²⁾ Vgl. Jordan, l. c.

während doch

$$\operatorname{sign} Q_{n+1}(-\infty) = (-1)^{n+1}$$

ist. Infolgedessen muß $Q_{n+1}(z)$ auch unterhalb $\xi_{n,1}$ eine reelle Wurzel haben. Man erkennt also, daß $Q_{n+1}(z)$ $n+1$ reelle, einfache Wurzeln

$$\xi_{n+1,1} < \xi_{n+1,2} < \dots < \xi_{n+1,n+1}$$

besitzen muß, und daß dieselben durch die Wurzeln $\xi_{n,\nu}$ des Polynoms $Q_n(z)$ getrennt werden, was so ausgedrückt werden kann:

$$(18) \quad \operatorname{sign} Q_n(\xi_{n+1,\nu}) = \operatorname{sign} Q'_{n+1}(\xi_{n+1,\nu}).$$

Wir gehen nun mit $z = \xi_{n+1,\nu}$ in die Formel (16) hinein und erhalten

$$P_{n+1}(\xi_{n+1,\nu}) Q_n(\xi_{n+1,\nu}) = \frac{T_{n+1}}{T_n} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n+1),$$

woraus

$$\operatorname{sign} P_{n+1}(\xi_{n+1,\nu}) = \operatorname{sign} Q_n(\xi_{n+1,\nu}) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n+1);$$

der Vergleich mit der Formel (18) liefert endlich

$$\operatorname{sign} P_{n+1}(\xi_{n+1,\nu}) = \operatorname{sign} Q'_{n+1}(\xi_{n+1,\nu}) \quad (\nu = 1, \dots, n+1).$$

Unsere Behauptung gilt also auch für den Index $n+1$ in allen ihren Teilen, und damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

III. Aus dem eben Bewiesenen ergibt sich die Partialbruchzerlegung von $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$:

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n,\nu}}{z - \xi_{n,\nu}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

dabei ist

$$A_{n,\nu} = \frac{P_n(\xi_{n,\nu})}{Q'_n(\xi_{n,\nu})} > 0$$

und

$$\sum_{\nu=1}^n A_{n,\nu} = t_0.$$

$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ hat also reelle, einfache Pole und positive Residuen; folglich gelten für die Koeffizienten seiner Entwicklung (11) nach der Bemerkung im § 1 die Relationen:

$$t_{2k}^{(n)} \geq 0, \quad t_{2k}^{(n)} t_{2k+2}^{(n)} \geq (t_{2k+1}^{(n)})^2 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

IV. Wir betrachten jetzt die Zahlenfolge, gebildet aus den Koeffizienten einer und derselben geraden Potenz von z in den Entwicklungen von $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Wir wollen zeigen, daß sie monoton aufsteigend ist, in Zeichen ausgedrückt:

$$t_{2k}^{(n)} \leq t_{2k}^{(n+1)} \quad \text{für } k \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Dazu brauchen wir aber einen Hilfssatz, von dem wir einen sehr eleganten Beweis nach Laguerre geben wollen⁴⁾.

Hilfssatz. Es sei $f(z)$ ein reelles Polynom n -ten Grades ($n \geq 1$), das lauter reelle Wurzeln besitzt, worunter mindestens eine $\neq 0$; es sei ferner um $z = \infty$

$$\frac{1}{f(z)} = a_n z^{-n} + a_{n+1} z^{-n-1} + \dots$$

Dann gilt für alle $k \geq 1$

$$\text{sign } a_{n+2k} = \text{sign } a_n.$$

Beweis. Es ist für $k \geq 1$

$$1 = (a_n z^{-n} + \dots + a_{n+2k} z^{-n-2k}) f(z) + (a_{n+2k+1} z^{-n-2k-1} + \dots) f(z)$$

oder

$$(a_n + a_{n+1} z^{-1} + \dots + a_{n+2k} z^{-2k}) z^{-n} f(z) = 1 - (a_{n+2k+1} z^{-2k-1} + \dots) z^{-n} f(z) \\ = 1 + c z^{-2k-1} + \dots$$

Die rechte Seite dieser letzten Gleichung ist ein Polynom in z^{-1} , da es die linke ist; sein Grad ist notwendig $\geq 2k+1$, da nach unseren Voraussetzungen die Entwicklung von $\frac{1}{f(z)}$ unendlich viele von Null verschiedene Koeffizienten a enthalten muß. Führen wir also $x = z^{-1}$ ein, so wird die rechte Seite der Gleichung

$$(a_n + a_{n+1} x + \dots + a_{n+2k} x^{2k}) x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + c x^{2k+1} + \dots$$

ein Polynom in x sein, dessen Grad mindestens $2k+1$ beträgt. Es enthält mithin eine Lücke $\geq 2k$ und muß infolgedessen, nach einer bekannten Folgerung aus der Descartesschen Zeichenregel, mindestens $2k$ imaginäre Nullstellen aufweisen. Dasselbe gilt von der linken Seite der Gleichung. Folglich, da nach Voraussetzung $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ für imaginäres x von Null verschieden ist, muß das Polynom

$$a_n + a_{n+1} x + \dots + a_{n+2k} x^{2k}$$

$2k$ imaginäre Wurzeln haben. Dies erfordert, daß erstens

$$a_{n+2k} \neq 0$$

sei und zweitens

$$\text{sign } a_{n+2k} = \text{sign } a_n,$$

denn sonst wären von den $2k$ Wurzeln des Polynoms mindestens zwei reell. Damit ist der Beweis fertig.

⁴⁾ Siehe Laguerre, Œuvres I, S. 111.

Wenden wir nun den Hilfssatz auf unsere Frage an. Es ist nach Formel (16)

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{1}{Q_n(z) Q_{n+1}(z)}$$

oder auch nach (11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{2n+k}^{(n+1)} - t_{2n+k}^{(n)}}{z^{2n+k+1}} = \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{1}{Q_n(z) Q_{n+1}(z)}.$$

Das Polynom

$$Q_n(z) Q_{n+1}(z) = z^{2n+1} + \dots$$

ist reell und besitzt $2n+1$ reelle einfache Wurzeln, $\frac{T_{n+1}}{T_n}$ ist positiv; folglich muß nach dem Hilfssatze

$$t_{2n+2k}^{(n+1)} - t_{2n+2k}^{(n)} > 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

sein. Ferner gilt nach Definitionsbedingung 3.

$$t_{2k}^{(n+1)} = t_{2k}^{(n)} = t_{2k} \quad \text{für } k=0, \dots, n-1.$$

Die Folge $t_{2k}^{(n)}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ist also wirklich monoton wachsend.

V. Aus der vorangehenden Relation

$$t_{2k}^{(n)} \leq t_{2k}^{(n+1)} \quad (k \geq 0, n \geq 1)$$

und der Definitionsforderung 3. in Verbindung mit der Tatsache, daß die $t_{2k}^{(1)}$ der Entwicklung von

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{t_0}{z - t_0}$$

sämtlich positiv sind, folgt

$$0 < t_{2k}^{(n)} \leq t_{2k} \quad (k \geq 0, n \geq 1).$$

Vergleicht man dies mit der in III. gefundenen Relation

$$(t_{2k+1}^{(n)})^2 \leq t_{2k}^{(n)} t_{2k+2}^{(n)},$$

so erkennt man ohne weiteres, daß die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}}$$

und

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k^{(n)}}{z^{k+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

die Reihe

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{t_0}{z} + \frac{\sqrt{t_0 t_2}}{z^3} + \dots + \frac{t_{2k}}{z^{2k+1}} + \frac{\sqrt{t_{2k} t_{2k+2}}}{z^{2k+3}} + \dots$$

zur Majorante haben.

Damit schließt die Kette der Folgerungen, die wir bei beliebig gegebener Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ableiten wollen, und wir gehen dazu über, zu untersuchen, was geschieht, wenn $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ als konvergent vorausgesetzt wird.

§ 4.

Näherungsbrüche konvergenter Potenzreihen.

Es habe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ das Konvergenzgebiet $|z| > R$. Wir wollen zeigen, daß dann $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ für $n = +\infty$ in der ganzen z -Ebene bis auf Punkte der Strecke $-R \leq z \leq R$ der reellen Achse gegen $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ konvergiert. Dazu werden wir einen allgemeinen Hilfssatz vorausschicken; wir könnten ihn freilich bei unserer speziellen Untersuchung entbehren, da er aber unseres Wissens noch nicht ausgesprochen worden ist, möge er hier mitgeteilt werden. Er ist das Analogon zu einem Satze über Folgen ganzer rationaler Funktionen, der von den Herren Pólya und Lindwart publiziert worden ist⁵⁾.

Hilfssatz. Es sei

$$R_n(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

eine Folge von rationalen Funktionen mit einfachen Polen $\alpha_{n\nu}$ und positiven Residuen $A_{n\nu}$. Die Pole mögen sämtlich in einer Halbebene der komplexen Ebene liegen, und die Folge möge in der Umgebung eines Punktes im Innern der anderen Halbebene gleichmäßig konvergieren. *Es konvergiert dann die Folge überall im Innern dieser zweiten Halbebene, und zwar gleichmäßig auf jedem darin gelegenen beschränkten Bereich, dessen Abstand von der Begrenzungsgeraden > 0 ist.*

Beweis. Wir dürfen offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt, um den die Folge als konvergent vorausgesetzt wird, der Nullpunkt $z = 0$ sei, und daß die Gerade, welche die beiden Halbebenen voneinander trennt, die Richtung der reellen Achse habe (man braucht sonst nur eine ganze lineare Transformation auszuführen). Es haben dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle Pole $\alpha_{n\nu}$ nach der Voraussetzung des Satzes einen imaginären Teil

$$\Im(\alpha_{n\nu}) \geq d > 0.$$

In $|z| < d$ gilt die Entwicklung

$$R_n(z) = - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} z - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^3} z^2 - \dots$$

⁵⁾ Siehe Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 37 (1914).

Die Folge der $R_n(z)$ konvergiert nun nach Annahme in der Umgebung von $z=0$ gleichmäßig gegen einen Limes $R(z)$; dieser Limes muß mithin nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz ebenfalls regulär analytisch um $z=0$ sein und eine Entwicklung

$$R(z) = -c_0 - c_1 z - c_2 z^2 - \dots$$

besitzen. Es wird ferner gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^k} = c_{k-1} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Inbesondere bleiben also

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}}$$

und der imaginäre Teil

$$\Im \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} \right)$$

für $n = \infty$ beschränkt. Nun ist

$$\Im \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} \right) = - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu} \Im(\alpha_{n\nu})}{|\alpha_{n\nu}|^2},$$

also

$$\left| \Im \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} \right) \right| = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu} \Im(\alpha_{n\nu})}{|\alpha_{n\nu}|^2} \geq d \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2}.$$

Folglich bleibt

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2}$$

ebenfalls beschränkt, und wir können eine obere Schranke G für

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} \right| \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2}$$

unabhängig von n , d. h. für alle $n \geq 1$, angeben.

Wir schreiben jetzt $R_n(z)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} R_n(z) &= - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu} - z} \\ &= - \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} + \frac{A_{n\nu} z}{\alpha_{n\nu}^2} + \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^3} \frac{z^2}{\alpha_{n\nu} - z} \right) \\ &= - \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} - z \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^2} - z^2 \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}^3} \frac{1}{\alpha_{n\nu} - z}. \end{aligned}$$

Bewegt sich z in einem beschränkten Bereich, der unterhalb der Begrenzungsgeraden $\Im(z) = d$ liegt und einen Abstand $\delta > 0$ von ihr besitzt, so ist

$$\left| \frac{1}{\alpha_{n\nu} - z} \right| < \frac{1}{\delta}$$

und etwa

$$|z| < M.$$

Folglich gilt in dem fraglichen Bereich

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leq \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{\alpha_{n\nu}} \right| + |z| \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^2} + |z|^2 \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{|\alpha_{n\nu}|^3} \left| \frac{1}{\alpha_{n\nu} - z} \right| \\ &< G + MG + M^2 \frac{G}{\delta}, \end{aligned}$$

d. h. die Folge $R_n(z)$ ist daselbst gleichmäßig beschränkt. Man kann also auf unsere Folge den bekannten Stieltjes-Vitalischen Konvergenzsatz^{*)} anwenden und so die behauptete gleichmäßige Konvergenz erschließen.

Korollar. Sind alle Pole der

$$R_n(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_{n\nu}}{z - \alpha_{n\nu}} \quad (A_{n\nu} > 0)$$

reell, und konvergiert die Folge um irgendeinen Punkt der komplexen Zahlenebene gleichmäßig, so konvergiert sie überall in der z -Ebene mit eventueller Ausnahme von Punkten der reellen Achse. Die Konvergenz erfolgt gleichmäßig auf jedem beschränkten Bereich, dessen Abstand von der reellen Achse > 0 ist.

Der Beweis leuchtet ohne weiteres ein.

Wir kehren jetzt zu unseren rationalen Funktionen $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ zurück, welche der in $|z| > R$ als konvergent vorausgesetzten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ entsprechen. Sie haben nach § 3 III lauter reelle, einfache Pole und zugehörige positive Residuen. Wir behaupten nun, daß sie im Konvergenzgebiet

$$|z| > R$$

gegen $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem kleineren Gebiet um $z = \infty$. Daraus folgt dann nach dem Korollar, daß sie überall in der z -Ebene konvergieren mit Ausnahme von Punkten der reellen Strecke $-R \leq z \leq R$, und zwar gleichmäßig auf jedem beliebigen, jetzt auch

^{*)} Siehe C. Carathéodory und E. Landau, Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie 1911, S. 588–589.

unbeschränkten Bereich, der nur eine von Null verschiedene Entfernung von der obigen Punktmenge

$$-R \leq z \leq R$$

hat. Infolgedessen liefert ihr Limes eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ über $|z| > R$ hinaus.

Beweisen wir nun die ausgesprochene Behauptung!

Es gilt zunächst nach der dritten Definitionsbedingung für die $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_k^{(n)} = t_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ferner ist nach § 3 V die Potenzreihe

$$\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{t_0}{z} + \frac{\sqrt{t_0 t_2}}{z^2} + \dots$$

eine Majorante sowohl von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ als auch von

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=0}^n \frac{t_k^{(n)}}{z^{k+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Diese Majorante konvergiert aber natürlich in demselben Gebiet

$|z| > R$ wie $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{z^{k+1}}$. Die Potenzreihen für $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ konvergieren

also koeffizientenweise gegen die Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ für $n = \infty$ und haben sämtlich eine in $|z| > R$ konvergierende Majorante. Folglich, nach einer bekannten Schlußweise⁷⁾, konvergieren die durch sie dargestellten Funktionen $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ daselbst gegen die Funktion $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ für $n = \infty$, und zwar gleichmäßig in jedem kleineren Gebiet $|z| \geq R_1 > R$ um $z = \infty$.

Wie wir beiläufig bemerken wollen, geht aus dem Bewiesenen hervor, daß sämtliche Pole der $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$, $n \geq 1$, auf der Strecke $-R \leq z \leq R$ liegen. Daraus schließt man, daß $R > 0$ sein muß, d. h. unter den angenommenen Bedingungen (10) kann $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ keine ganze transzendente Funktion von $\frac{1}{z}$ darstellen.

§ 5.

Beweis der Hinlänglichkeit.

Es bleibt uns jetzt übrig, die gewonnenen Resultate für unsere Aufgabe zu verwerten. Dieselbe wurde am Ende des § 2 auf folgendes reduziert:

⁷⁾ Vgl. C. Carathéodory und E. Landau, l. c., S. 590, Hilfsatz 1.

Es sei $g(x)$ eine reelle ganze transzendente Funktion, die im Nullpunkte nicht verschwindet und den Bedingungen (2)

$$(2) \quad \begin{vmatrix} s_{2m} & s_{2m+1} & \dots & s_{2m+k-1} \\ s_{2m+1} & s_{2m+2} & \dots & s_{2m+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{2m+k-1} & s_{2m+k} & \dots & s_{2m+2k-2} \end{vmatrix} > 0$$

für eine ganze positive Zahl m und alle $k \geq 1$ genügt. Es ist dann zu zeigen, daß $g(x)$ nur reelle Wurzeln besitzen kann und vom Geschlecht $\leq 2m$ ist.

Beweis. Wir setzen $z = \frac{1}{x}$. Die Potenzreihe

$$(19) \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{s_{2m}}{z} + \frac{s_{2m+1}}{z^2} + \dots$$

hat ein Konvergenzgebiet $|z| > \frac{1}{R}$, wenn R der (nicht verschwindende) Konvergenzradius von

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -s_1 - s_2 x - s_3 x^2 - \dots$$

ist. Der Potenzreihe (19) entspricht nach § 3 und § 4 eine Folge von rationalen Funktionen

$$(20) \quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{z - \xi_{n,v}}, \quad \xi_{n,v} \text{ reell, } A_{n,v} > 0, \quad \sum_{v=1}^n A_{n,v} = s_{2m},$$

die für $n = \infty$ in der z -Ebene überall bis auf Punkte der Strecke $-\frac{1}{R} \leq z \leq \frac{1}{R}$ konvergiert, und zwar, wie wir jetzt hinzufügen können, gegen die meromorphe Funktion $f_1(z)$, welche durch (19) definiert wird. Also kann diese Grenzfunktion $f_1(z)$ nur reelle Pole haben. Dasselbe muß für

$$f(z) = s_1 + \frac{s_2}{z} + \dots + \frac{s_{2m-1}}{z^{2m-2}} + \frac{f_1(z)}{z^{2m-2}}$$

gelten. $f(z)$ ist aber nichts anderes als

$$-\frac{g'\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)};$$

folglich hat $\frac{g'(x)}{g(x)}$ nur reelle Pole und somit $g(x)$ nur reelle Nullstellen.

Der erste Teil unserer Aufgabe ist somit erledigt.

Wir setzen jetzt

$$(21) \quad -R_n(x) = s_1 + s_2 x + \dots + s_{2m-1} x^{2m-2} + x^{2m-2} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{Q_n\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Es ist dann nach obigem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

und zwar in der ganzen x -Ebene, ausgenommen Punkte des außerhalb $|x| < R$ gelegenen Teiles der reellen Achse. Die Konvergenz erfolgt übrigens gleichmäßig in jedem beschränkten Bereich, dessen Abstand von der Punktmenge

$$-\infty < x \leq -R, \quad R \leq x < +\infty$$

der reellen Achse von Null verschieden ist. Es sei nun x ein beliebiger, im Endlichen und außerhalb dieser Punktmenge gelegener Punkt. Der Radiusvektor $0x$ vom Nullpunkt 0 nach x ist ein Bereich, auf dem gleichmäßige Konvergenz stattfindet; folglich gilt

$$\frac{g(x)}{g(0)} = e^{\int_0^x \frac{g'(s)}{g(s)} ds} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x R_n(s) ds} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\int_0^x R_n(s) ds}$$

Nun ist nach (21) und (20)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -s_1 - \dots - s_{2m-1} x^{2m-2} - x^{2m-2} \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{x - \xi_{n,v}} \\ &= P(x) - x^{2m-1} \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{1 - x\xi_{n,v}}, \end{aligned}$$

unter $P(x)$ ein festes Polynom vom Grade $\leq 2m-2$ verstanden. Diese Gleichung formen wir leicht um:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= P(x) - \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v} (x\xi_{n,v})^{2m-1}}{\xi_{n,v}^{2m-1} (1 - x\xi_{n,v})} \\ &= P(x) - \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m-1}} \left\{ \frac{1}{1 - x\xi_{n,v}} - \frac{1 - (x\xi_{n,v})^{2m-1}}{1 - x\xi_{n,v}} \right\} \\ &= P(x) + \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m-1}} \left\{ \frac{-\xi_{n,v}}{1 - x\xi_{n,v}} + \xi_{n,v} + x\xi_{n,v}^2 + \dots + x^{2m-2} \xi_{n,v}^{2m-2} \right\}; \end{aligned}$$

dabei wurde stillschweigend angenommen, daß alle $\xi_{n,v}$ ($v=1, 2, \dots, n$) von Null verschieden seien; sollte aber ein $\xi_{n,v}=0$ sein, so ist das entsprechende sinnlose Glied in der Summe selbstverständlich durch $-A_{n,v} x^{2m-1}$ zu ersetzen. Aus der letzten Formel ergibt sich jetzt

$$\int_0^x R_n(x) dx = \int_0^x P(x) dx + \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m}} \left\{ \lg(1 - x\xi_{n,v}) + x\xi_{n,v} + \frac{(x\xi_{n,v})^2}{2} + \dots + \frac{(x\xi_{n,v})^{2m-1}}{2m-1} \right\}$$

$$= \int_0^x P(x) dx + \sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m}} \lg \left\{ (1 - x\xi_{n,v}) e^{\frac{x\xi_{n,v}}{1} + \frac{(x\xi_{n,v})^2}{2} + \dots + \frac{(x\xi_{n,v})^{2m-1}}{2m-1}} \right\}$$

und

$$(22) \quad e^{\int_0^x R_n(x) dx} = e^{\int_0^x P(x) dx} e^{\sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m}} \lg \left\{ (1 - x\xi_{n,v}) e^{\frac{x\xi_{n,v}}{1} + \frac{(x\xi_{n,v})^2}{2} + \dots + \frac{(x\xi_{n,v})^{2m-1}}{2m-1}} \right\}},$$

worin natürlich im Falle eines $\xi_{n,v} = 0$ das bezügliche Summenglied durch $-A_{n,v} \frac{x^{2m}}{2m}$ zu ersetzen ist.

Andererseits gilt nach einer bekannten Abschätzung^{a)} für jedes endliche komplexe z

$$|(1-z)e^{\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}}| \leq e^{c|z|^{p+1}} \quad (p \geq 1),$$

wobei c eine positive, von z unabhängige Konstante bedeutet, die wir selbstverständlich $\geq \frac{1}{2m}$ annehmen dürfen. Also ist, unter $\Re(z)$ allgemein den reellen Teil von z verstanden,

$$\Re \left(\lg \left\{ (1-z)e^{\frac{z}{1} + \dots + \frac{z^p}{p}} \right\} \right) \leq c|z|^{p+1}.$$

Dies angewandt auf unsere Formel (22) ergibt

$$\begin{aligned} \left| e^{\int_0^x R_n(x) dx} \right| &= e^{\Re \left(\int_0^x P(x) dx \right)} e^{\sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m}} \Re \left(\lg \left\{ (1-x\xi_{n,v}) e^{\frac{x\xi_{n,v}}{1} + \dots + \frac{(x\xi_{n,v})^{2m-1}}{2m-1}} \right\} \right)} \\ &\leq e^{\Re \left(\int_0^x P(x) dx \right)} e^{\sum_{v=1}^n \frac{A_{n,v}}{\xi_{n,v}^{2m}} c|x|^{2m+1}} \\ &= e^{\Re \left(\int_0^x P(x) dx \right)} e^{c \sum_{v=1}^n A_{n,v} |x|^{2m}} \\ &= e^{\Re \left(\int_0^x P(x) dx \right)} e^{c_{2m} |x|^{2m}}, \end{aligned}$$

diese Relation gilt auch im Falle eines $\xi_{n,v} = 0$, da $c \geq \frac{1}{2m}$ angenommen

^{a)} Vgl. z. B. E. Borel, Leçons sur les fonctions entières, S. 57.

wurde. Bedenkt man jetzt, daß $P(x)$ ein Polynom vom Grade $\leq 2m-2$ bedeutet, so gelangt man zum Ergebnis

$$\left| e^{\int_0^x R_n(x) dx} \right| \leq e^{c_1 |x|^{2m} + \gamma_1},$$

unter c_1 und γ_1 positiven Konstanten verstanden. Folglich ist auch

$$\left| \frac{g(x)}{g(0)} \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\int_0^x R_n(x) dx} \right| \leq e^{c_1 |x|^{2m} + \gamma_1}$$

und

$$|g(x)| \leq e^{c_2 |x|^{2m}},$$

wobei c_2 eine weitere positive Konstante bezeichnet. Das gilt zunächst für jedes x , das außerhalb der reellen Punktmenge

$$-\infty < x \leq R, \quad R \leq x < +\infty$$

liegt, also, da $g(x)$ eine ganze und a fortiori stetige Funktion ist, überhaupt für alle x . Hieraus folgt nach den Hadamardschen Fundamentaltheoremen⁹⁾, daß $g(x)$ höchstens vom Geschlecht $2m$ ist, und damit sind wir am Ziele.

Zürich, den 28. Juli 1919.

⁹⁾ Vgl. E. Borel, l. c., S. 74–75.

(Angenommen 25. 12. 1919.)

Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen.

Von

Wolfgang Sternberg in Heidelberg.

Einleitung.

Das Ziel dieser Arbeit ist die asymptotische Darstellung der Integrale gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen vom linearen homogenen Typus.

Man sagt nach Poincaré¹⁾, daß die Funktion $f(x)$ durch die Reihe $c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$, die für jeden endlichen Wert von x divergieren darf, asymptotisch dargestellt wird, in einer Formel ausgedrückt:

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots,$$

wenn für $m = 0, 1, 2, \dots$ die Limesgleichungen gelten:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \dots - \frac{c_m}{x^m} \right) x^m = 0.$$

Der Grenzübergang ist stets so zu verstehen, daß x durch reelle positive Werte ins Unendliche geht. Ist $O(g(x))$ das bekannte Landausche Symbol²⁾, so ergibt sich aus der obigen Definition unmittelbar für jedes m

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_m}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Man hat nämlich auf Grund der für $m+1$ gültigen Limesgleichung

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_m}{x^m} + \frac{c_{m+1}}{x^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{x^{m+1}} \quad (\lim \varepsilon = 0)$$

und kann $c_{m+1} + \varepsilon = O(1)$ setzen.

¹⁾ Acta math. 8 (1886). Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, S. 295–344.

²⁾ Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1, S. 31.

Im Sinne Poincarés können nun die Integrale der Differentialgleichung

$$(1) \quad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

bei Annäherung der Variablen x an eine singuläre Stelle, die wir uns immer ins Unendliche gelegt denken, unter bestimmten Voraussetzungen über die Koeffizienten $P_i(x)$ asymptotisch dargestellt werden. Sei

$$P_i = x^{ik} p_i \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$p_i = a_i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{ir}}{x^r}$$

oder, was auch genügt,

$$p_i \sim a_i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{ir}}{x^r},$$

wobei k eine nicht negative ganze Zahl ist und die Reihe für p_i entweder in einer gewissen Umgebung der Stelle $x = \infty$ konvergiert oder selbst asymptotisch ist. Dann ist $x = \infty$ keine Bestimmtheitsstelle im Sinne der Fuchsschen Theorie (an einer solchen, der übrigens der Wert $k = -1$ entsprechen würde, wäre eine asymptotische Darstellung nicht nötig, weil dann die zugehörigen Reihenentwicklungen der Integrale konvergieren würden), und die Differentialgleichung (1) hat in der Poincaréschen Ausdrucksweise den Rang $k+1$. Besitzt die sogenannte charakteristische Gleichung

$$(2) \quad \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

nur einfache Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, so existieren nach Thomé³⁾ n der Gleichung (1) formal genügende Entwicklungen, sog. „Normalreihen“

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\varrho_i} \varphi_i \left(\frac{1}{x} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dabei ist $\gamma_i(x)$ ein Polynom vom Grade $k+1$ mit dem höchsten Term $\frac{a_1 x^{k+1}}{k+1}$, das sich im Falle des Ranges 1, d. h. für $k=0$, offenbar auf $\alpha_i x$ reduziert, ϱ_i aber eine Konstante und

$$\varphi_i = 1 + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots$$

eine im allgemeinen divergente Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, deren konstantes Glied nicht verschwindet, also gleich 1 gesetzt werden kann.

Hat jedoch (2) mehrfache Wurzeln (diesen Fall hat Fabry⁴⁾ ausführ-

³⁾ J. f. Math. 74, 75, insbesondere 76, ferner 96, S. 122.

⁴⁾ Thèses de la faculté des sciences, Paris (1885). Sur les intégrales des équations linéaires à coefficients rationels, S. 85.

lich behandelt), was im allgemeinen zur Folge hat, daß die Zahlen q durch Gleichungen höheren Grades bestimmt werden, so erhält man Integrale der Form

$$e^{z^{(q)}} x^q (\varphi_q + \varphi_{q-1} \log x + \dots + \varphi_1 \log^{q-1} x + \varphi_0 \log^q x),$$

wo die positive ganze Zahl $q < n$ ist.

Der asymptotische Charakter der Reihen φ soll nun erwiesen werden. Der Nachweis ist bereits erbracht bei der Differentialgleichung vom Range 1, deren charakteristische Gleichung nur einfache Wurzeln besitzt⁵⁾. Der Fall mehrfacher Wurzeln, über den bis vor kurzem noch nichts bekannt war, ist 1914 von dem Amerikaner Love unter Beschränkung auf Gleichungen 2. und 3. Ordnung behandelt worden⁶⁾.

Wir liefern im ersten Kapitel dieser Arbeit den Nachweis der asymptotischen Darstellung mittels einer neuen Methode in völliger Allgemeinheit für gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, beliebigen Ranges und beliebiger Vielfachheit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

Unsere Methode beruht teilweise auf einem schon von Liouville bei einer anderen Aufgabe benutzten Kunstgriff und kann zunächst bei den in den §§ 1 bis 3 behandelten Differentialgleichungen vom Range 1 mit einfachen α -Wurzeln kurz folgendermaßen charakterisiert werden. Wir führen die Abschnittsfunktionen

$$z_i = e^{\alpha_i z} \cdot x^{c_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ein, stellen die Differentialgleichung

$$z^{(n)} + Q_1 z^{(n-1)} + \dots + Q_{n-1} z' + Q_n z = 0$$

auf, welche die z_i zu Lösungen hat, und schreiben (1) in der Form

$$(1^*) \quad \begin{cases} y^{(n)} + Q_1 y^{(n-1)} + \dots + Q_{n-1} y' + Q_n y \\ = (Q_1 - P_1) y^{(n-1)} + \dots + (Q_{n-1} - P_{n-1}) y' + (Q_n - P_n) y = F(y). \end{cases}$$

Indem wir jetzt $F(y)$ für einen Augenblick als bekannt ansehen, stellen wir das allgemeine Integral der scheinbar unhomogenen Gleichung (1*) mittels der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten durch die partikulären Integrale der zugehörigen homogenen Gleichung, d. h. durch die z_i , dar:

$$(A) \quad y = \sum_{i=1}^n c_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\alpha_i}^z \frac{A_i}{A} F(y) du.$$

⁵⁾ Math. Enz., II B 5. Hilb, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, Kap. 5.

⁶⁾ Hilb, l. c.

Dabei ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1, \dots, z_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ z_n, \dots, z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

die Wronskische Determinante der z_i , Δ_i sind ihre zu $z_i^{(n-1)}$ gehörigen Unterdeterminanten, g_i beliebig, aber fest gewählte Konstante und c_i die willkürlichen Integrationskonstanten. Substituieren wir in (A) für $F(y)$

den Differentialausdruck $\sum_{s=1}^n (Q_s - P_s) y^{(n-s)}$, so erscheint (A) als eine

Funktionalgleichung für y . Diese mit den n Parametern c_1, c_2, \dots, c_n behaftete *Integrodifferentialgleichung* ist der gegebenen von Parametern freien Differentialgleichung (1) äquivalent. Außer ihr brauchen wir noch zwei weitere Relationen. Die erste ist die Beziehung, die zwischen den Koeffizienten P_i von (1) und den Koeffizienten Q_i der Hilfsdifferentialgleichung der Abschnittsfunktionen notwendig bestehen muß. Diese besagt nun, daß die Entwicklungen der Q_i , welche rational in $\frac{1}{x}$ sind, und der P_i in den Gliedern bis zur $(m+1)$ -ten Ordnung einschließlich übereinstimmen, so daß

$$(B) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

gesetzt werden kann. Sodann läßt sich der Determinantenquotient $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ mit Leichtigkeit in der Form

$$(C) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-a_i x} x^{-e_i} O(1)$$

abschätzen.

Die Funktionalgleichung (A) bildet nun die Grundlage für die auf y bezüglichen, mittels (B) und (C) vorgenommenen Abschätzungen, aus denen sich die asymptotische Darstellung in der folgenden Gestalt ergibt,

$$y_i = z_i + e^{a_i x} x^{e_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) = e^{a_i x} x^{e_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)\right),$$

$$y_i^{(s)} = z_i^{(s)} + e^{a_i x} x^{e_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

In § 4 werden Differentialgleichungen von dem beliebigen Range $k+1$ untersucht. In (A) muß jetzt natürlich die Abschnittsfunktion

$$z_i = e^{r_i(x)} x^{e_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m}\right)$$

eingeführt werden. Im übrigen besteht die ganze Änderung darin, daß an Stelle von (B) und (C) die verallgemeinerten Formeln

$$(B^*) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{x^{(i-1)k}}{x^{m+1}}\right),$$

$$(C^*) \quad \frac{d_i}{d} = e^{-\gamma_i(x)} x^{-[q_i + (n-1)k]} O(1)$$

gelten, die für $k=0$ wieder in die spezielleren übergehen.

Das Resultat ist hier

$$y_i = z_i + e^{\gamma_i(x)} x^{q_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

$$y_i^{(s)} = z_i^{(s)} + e^{\gamma_i(x)} x^{q_i + sk} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Es ist bemerkenswert, daß Gleichungen beliebigen Ranges direkt und zwar ohne die geringste Schwierigkeit behandelt werden, so daß man nicht nötig hat, wie es die Autoren bisher getan haben⁷⁾, Gleichungen höheren Ranges auf solche vom Range 1 mittels umständlicher Transformationen, die doch keine allgemeinen Ergebnisse liefern, zurückzuführen.

In den letzten Paragraphen des ersten Kapitels lassen wir die Voraussetzung einfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung fallen.

Neben (A) bleibt auch (B) resp. (B^{*}) ungeändert. Hingegen wird (C) oder (C^{*}) ersetzt durch

$$\frac{d_i}{d} = e^{-\alpha_i x} x^{-q_i} x^{\lambda_i} \log^{\mu_i} x O(1)$$

oder

$$\frac{d_i}{d} = e^{-\gamma_i(x)} x^{-[q_i + (n-1)k]} x^{\lambda_i} \log^{\mu_i} x O(1),$$

wo λ_i und μ_i nicht negative ganze Zahlen $< n$ bedeuten. Diese geringfügige Modifikation bewirkt aber nur unwesentliche Änderungen bei den Abschätzungen, sodaß auch der bisher sehr vernachlässigte Fall der mehrfachen Wurzeln mit Leichtigkeit in völliger Allgemeinheit erledigt wird. Wir wollen noch die asymptotische Darstellung der zu einer ν -fachen Wurzel ϱ gehörigen ν Integrale explizite angeben. Führt man außer den Abschnitten

$$z_1 = e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \left(1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}\right),$$

$$z_2 = e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \left\{ C_{20} + \frac{C_{21}}{x} + \dots + \frac{C_{2m}}{x^m} + \left(1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}\right) \log x \right\}$$

⁷⁾ Poincaré, l. c.; Hilb, l. c. Jedoch hat neuerdings Horn Gleichungen höheren Ranges ebenfalls direkt behandelt, J. f. Math. 138.

auch die Teilfunktionen, aus denen sie zusammengesetzt sind,

$$v_2 = e^{\gamma(s)} x^e \left(C_{20} + \frac{C_{21}}{x} + \dots + \frac{C_{2m}}{x^m} \right), \dots, v_r = e^{\gamma(s)} x^e \left(C_{r0} + \frac{C_{r1}}{x} + \dots + \frac{C_{rm}}{x^m} \right)$$

ein, so ergibt sich die Darstellung gleich in der endgültigen Form.

$$y_1 = z_1 + e^{\gamma(s)} x^e O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \quad y_1^{(s)} = z_1^{(s)} + e^{\gamma(s)} x^{e+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

$$y_2 = v_2 + e^{\gamma(s)} x^e O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + y_1 \log x, \quad y_2^{(s)} = v_2^{(s)} + e^{\gamma(s)} x^{e+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + (y_1 \log x)^{(s)},$$

$$y_r = v_r + e^{\gamma(s)} x^e O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + \left[\binom{r-1}{1} y_{r-1} \log x - \binom{r-1}{2} y_{r-2} \log^2 x + \dots + (-1)^r y_1 \log^{r-1} x \right],$$

$$y_v^{(s)} = v_r^{(s)} + e^{\gamma(s)} x^{e+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + [\dots]^{(s)}.$$

Das Gesamtergebnis des ersten Kapitels ist, daß die formalen Entwicklungen ausnahmslos asymptotisch sind.

Im zweiten Kapitel gehen wir ins mehr-, speziell ins zweidimensionale Gebiet über, wo bisher noch keine Definition der asymptotischen Darstellung existiert. Diese gewinnen wir unter Benutzung

der geometrischen Ausdrucksweise folgendermaßen. Wir legen durch einen Punkt (A) (s. Fig. 1) im Innern des ersten Quadranten der (x, y) -Ebene — er möge etwa die Koordinaten $x = a$, $y = a$ besitzen, unter a irgendeine positive Konstante verstanden, — zwei Geraden G_1 und G_2 mit den Richtungskoeffizienten μ_1 und μ_2 , welche positiv, beliebig klein resp. beliebig groß

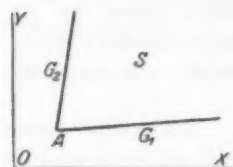


Fig. 1.

und ein für allemal fest, d. h. von x und y unabhängig sind. In dem durch G_1 und G_2 begrenzten Sektor S ist $\mu_1 \leq \frac{y}{x} \leq \mu_2$ oder $\frac{1}{\mu_2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{\mu_1}$, d. h. die beiden Quotienten $\frac{y}{x}$ und $\frac{x}{y}$ sind beschränkt; anders ausgedrückt, x und y werden unendlich groß von derselben Ordnung.

Wir definieren nun, es ist

$$f(x, y) \sim c_{00} + \frac{c_{10}}{x} + \frac{c_{01}}{y} + \frac{c_{20}}{x^2} + \dots,$$

wenn für $m = 0, 1, 2, \dots$ die Limesgleichungen gelten

$$\lim \left(f(x, y) - c_{00} - \frac{c_{10}}{x} - \dots - \frac{c_{m0}}{x^m} - \frac{c_{m-1,1}}{x^{m-1}y} - \dots - \frac{c_{0,m}}{y^m} \right) x^m = 0.$$

Der Grenzübergang ist so zu verstehen, daß der variable Punkt $P(x, y)$ längs irgendeiner ganz in S verlaufenden Kurve ins Unendliche rückt.

Die in obiger Limesgleichung auftretende Differenz kann natürlich statt mit x^m auch mit y^m oder allgemein mit $x^p y^{m-p}$ multipliziert werden, wo p irgendeine Konstante ist. Ist in Erweiterung der Landauschen Definition, wenn r eine positive Konstante bedeutet, $O(x^r)$ das allgemeine Symbol für irgendeine Funktion von x und y die, mit x^r dividiert, bei dem eben erklärten Grenzübergange beschränkt bleibt, so folgt aus der Definition der asymptotischen Darstellung unmittelbar für $m = 0, 1, 2, \dots$

$$f(x, y) = c_{00} + \frac{c_{10}}{x} + \dots + \frac{c_{0m}}{y^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Es kommen nun tatsächlich *Funktionen* vor, die in unserem Sinne *asymptotisch dargestellt* werden können. Dies sind die *Integrale von Systemen simultaner partieller linearer Differentialgleichungen mit einer endlichen Anzahl linear unabhängiger Lösungen*.

Als Beispiel zur Durchführung unserer Methode wählen wir folgendes System, das neuerdings durch *geometrische Anwendungen*^{*)} besonderes Interesse gewonnen hat (die Differentiation ist durch Indizes angedeutet):

$$(I) \quad \begin{aligned} z_{xx} + P^{(1)} z_{xy} + P^{(2)} z_x + P^{(3)} z_y + P^{(4)} z &= 0 \\ z_{yy} + Q^{(1)} z_{xy} + Q^{(2)} z_x + Q^{(3)} z_y + Q^{(4)} z &= 0. \end{aligned}$$

Hierin mögen die Koeffizienten $P^{(i)}$ und $Q^{(i)}$ analytische Funktionen von x und y sein, die sich etwa an der Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ regulär verhalten. Wenn $P^{(1)} Q^{(1)} - 1$ nicht identisch verschwindet, was wir voraussetzen, so hat (I) höchstens 4 linear unabhängige Integrale. Die Maximalzahl 4 der Lösungen — im allgemeinen werden natürlich überhaupt keine existieren — wird erreicht, wenn die Koeffizienten $P^{(i)}$, $Q^{(i)}$ vier Relationen^{**)} genügen, die ihrerseits wieder partielle Differentialgleichungen sind. Die Gültigkeit dieser Relationen wird vorausgesetzt. Wir nehmen nun an, daß die Koeffizienten von (I) in der Form

$$P^{(i)} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}^{(i)}}{x^{\mu} y^{\nu}}, \quad Q^{(i)} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu\nu}^{(i)}}{x^{\mu} y^{\nu}}$$

oder

$$P^{(i)} \sim \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}^{(i)}}{x^{\mu} y^{\nu}}, \quad Q^{(i)} \sim \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu\nu}^{(i)}}{x^{\mu} y^{\nu}}$$

darstellbar sind, wo die Reihen rechts etwa für $|x| \geq a$, $|y| \geq a$ konvergieren oder selbst asymptotisch sind. Zur Abkürzung setzen wir

$$a_{00}^{(i)} = a_i, \quad b_{00}^{(i)} = b_i.$$

^{*)} Wilczynski, Math. Ann. 76. Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven.

^{**)} Vgl. in dem Spezialfall $P^{(1)} \equiv 0$, $Q^{(1)} \equiv 0$ Wilczynski, Am. Journal of Math. 36, Nr. 3 (1914). On a Certain Completely Integrable System of Linear Partial Differential Equations.

Das System

$$(II) \quad \begin{aligned} \alpha^2 + a_1 \alpha \beta + a_2 \alpha + a_3 \beta + a_4 &= 0 \\ \beta^2 + b_1 \alpha \beta + b_2 \alpha + b_3 \beta + b_4 &= 0, \end{aligned}$$

das wir das *charakteristische Gleichungssystem* nennen wollen, möge 4 Lösungspaare besitzen. Wir machen ferner vorläufig die Annahme, daß das System (II) nur einfache Lösungspaare $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_4, \beta_4)$ hat.

Dann existieren vier dem System (I) formal genügende Entwicklungen

$$e^{a_i x + \beta_i y} x^{c_i} y^{d_i} \varphi_i, \\ \varphi_i = 1 + \frac{C_{10}^i}{x} + \frac{C_{01}^i}{y} + \frac{C_{20}^i}{x^2} + \dots \quad (i = 1, \dots, 4),$$

wobei die Reihen φ_i im allgemeinen für jede Wertverbindung x, y divergieren.

Wir wollen nun zeigen, daß die vier Integrale von (I) durch die obigen Entwicklungen asymptotisch dargestellt werden.

Zu diesem Zwecke führen wir die Abschnittsfunktionen

$$w^{(i)} = e^{a_i x + \beta_i y} x^{c_i} y^{d_i} \left(1 + \frac{C_{10}^i}{x} + \dots + \frac{C_{0m}^i}{y^m} \right)$$

ein, stellen das System

$$\begin{aligned} w_{xx} + H^{(1)} w_{xy} + H^{(2)} w_x + H^{(3)} w_y + H^{(4)} w &= 0, \\ w_{yy} + K^{(1)} w_{xy} + K^{(2)} w_x + K^{(3)} w_y + K^{(4)} w &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $w^{(1)}, \dots, w^{(4)}$ auf und schreiben (I) in der Form

$$I^*) \quad \begin{aligned} z_{xx} + H^{(1)} z_{xy} + \dots + H^{(4)} z &= (H^{(1)} - P^{(1)}) z_{xy} + \dots + (H^{(4)} - P^{(4)}) z = F \\ z_{yy} + K^{(1)} z_{xy} + \dots + K^{(4)} z &= (K^{(1)} - Q^{(1)}) z_{xy} + \dots + (K^{(4)} - Q^{(4)}) z = G \end{aligned}$$

Indem wir wieder $F(z)$ und $G(z)$ als bekannte Funktionen behandeln, gelangen wir zu der mit dem System (I) äquivalenten, *grundlegenden Funktionalgleichung*

$$(A) \quad z = \sum_{i=1}^4 c_i w^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_{g_i, l_i}^{x, y} [M^{(i)} du + N^{(i)} dv].$$

Darin sind die c_i die willkürlichen Integrationskonstanten, die g_i und l_i beliebig, aber fest gewählte Konstante. Der Integrand ist stets ein exakter Differentialausdruck, sodaß das Integral vom Wege unabhängig ist. Ferner hat man (auch die Differentiation nach u und v wird durch Indizes angedeutet)

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= \frac{A_u^{(i)}}{A} FC + \frac{A_v^{(i)}}{A} FC + \frac{A^{(i)}}{A} (F_v C + FC + G_u C + GC), \\ N^{(i)} &= \frac{A_u^{(i)}}{A} GC + \frac{A_v^{(i)}}{A} GC + \frac{A^{(i)}}{A} (F_v C + FC + G_u C + GC), \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_{xy}^{(1)} & w_x^{(1)} & w_y^{(1)} & w^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{xy}^{(i)} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

das Analogon der Wronskischen Determinante und $\Delta^{(i)}$ die zu $w_{xy}^{(i)}$ gehörige Unterdeterminante von Δ ist. Schließlich bedeutet C irgendeine Funktion, die nur von den Koeffizienten $H^{(i)}$ und $K^{(i)}$ der Hilfsdifferentialgleichung der Abschnitte abhängt und leicht in der Form

$$|C| = O(1)$$

abgeschätzt wird. Die Analogie zwischen (A) und (A) ist evident. Außer dieser letzteren Gleichung brauchen wir noch zwei weitere Relationen. Erstens ist

$$(B) \quad P^{(i)} - H^{(i)} = 0 \left(\frac{1}{x^{m+2}} \right), \quad Q^{(i)} - K^{(i)} = 0 \left(\frac{1}{x^{m+2}} \right)$$

und zweitens

$$(C) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_x^{(i)}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_y^{(i)}}{\Delta} \end{array} \right\} = e^{-(\alpha_1 x + \beta_1 y)} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} O(1).$$

Es ist klar, daß die Formeln (A), (B), (C) hier dasselbe leisten wie beim eindimensionalen Problem (A), (B), (C).

Sie ergeben als *Endresultat die asymptotische Darstellung in der Form*

$$\begin{aligned} z^{(i)} &= w^{(i)} + e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ z_x^{(i)} &= w_x^{(i)} + e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ z_y^{(i)} &= w_y^{(i)} + e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ z_{xy}^{(i)} &= w_{xy}^{(i)} + e^{\alpha_1 x + \beta_1 y} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Zum Schluß fassen wir die Resultate der Arbeit in der Aussage zusammen: *Die Theorie der asymptotischen Darstellungen ist bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu einem gewissen Abschluß gebracht und eine analoge Theorie für die oben charakterisierten Systeme partieller Gleichungen aufgestellt.*

1. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

§ 1.

Differentialgleichungen vom Range 1. Formale Operationen.

Es liege vor die Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$(1) \quad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0.$$

Der Punkt $x = \infty$ sei eine isolierte singuläre Stelle derselben, sodaß, wenn die positive Zahl a genügend groß ist, für $|x| \geq a$ keine singuläre Stelle außer $x = \infty$ selbst möglich ist.

Die Koeffizienten der Gleichung mögen die Form

$$P_i(x) = a_i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{i\nu}}{x^\nu}$$

oder

$$P_i(x) \sim a_i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{i\nu}}{x^\nu}$$

haben, wo im ersten Falle die Reihe rechts in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergiert. Dann ist die Stelle $x = \infty$ keine Stelle der Bestimmtheit im Sinne der Fuchsschen Theorie (außer in dem speziellen Falle, wo alle a_i und $a_{i\nu}$ für $\nu < i$ verschwinden), und die Differentialgleichung hat in der Poincaréschen Ausdruckswise den Rang 1.

Die charakteristische Gleichung

$$(2) \quad f(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

habe die n verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Dann existieren bekanntlich^{*)} n Entwicklungen

$$e^{\alpha_i x} x^{\rho_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

die rein formal der Gleichung (1) genügen. Leider sind die dabei auftretenden Reihen im allgemeinen für jeden endlichen Wert von x divergent. Unser Ziel ist, zu zeigen, daß diese Entwicklungen die Integrale asymptotisch darstellen. Zunächst wollen wir die formalen Untersuchungen weiter führen. Wir setzen

$$y = e^{\alpha x} v$$

und finden für v die Gleichung

$$v^{(n)} + S_1 v^{(n-1)} + \dots + S_{n-1} v' + S_n v = 0,$$

^{*)} Für die Berechnung der Größen $\alpha_i, \rho_i, C_{i1}, C_{i2}, \dots$ vgl. z. B. Horn „Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung“, Leipzig (1905); § 40, S. 183 ff.

wobei

$$S_i = \binom{n}{n-i} \alpha^i + \binom{n-1}{n-i} \alpha^{i-1} P_1 + \dots + \binom{n-i+1}{n-i} \alpha P_{i-1} + P_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ist. Die S_i zeigen also in der Umgebung von $x = \infty$ dasselbe Verhalten wie die P_i und können etwa in der Form

$$S_i = b_i + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{iv}}{x^v}$$

oder

$$S_i \sim b_i + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_{iv}}{x^v}$$

entwickelt werden. Ist α eine Wurzel von (2), so ist

$$b_n = f(\alpha) = 0,$$

dagegen

$$b_{n-1} = f'(\alpha) \neq 0,$$

da (2) nach Voraussetzung keine mehrfachen Wurzeln besitzt.

Ferner brauchen wir noch die Größen

$$b_{n1} = a_{11} \alpha^{n-1} + a_{21} \alpha^{n-2} + \dots + a_{n1}$$

$$b_{n2} = a_{12} \alpha^{n-1} + a_{22} \alpha^{n-2} + \dots + a_{n2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_{n-1,1} = (n-1) a_{11} \alpha^{n-2} + (n-2) a_{21} \alpha^{n-3} + \dots + a_{n-1,1}, \dots$$

$$b_{n-2} = \binom{n}{2} \alpha^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 \alpha^{n-3} + \dots + a_{n-2}.$$

Die Gleichung für v kann nun durch eine Reihe der Form

$$x^v + C_1 x^{v-1} + C_2 x^{v-2} + \dots$$

formal befriedigt werden. Man findet durch Einsetzen und Vergleichung der Koeffizienten

$$(3) \quad b_{n-1} \varrho + b_{n1} = 0,$$

wodurch ϱ , sowie

$$(4) \quad \begin{cases} -b_{n-1} C_1 + b_{n-2} \varrho(\varrho-1) + b_{n-1,1} \varrho + b_{n2} = 0 \\ \vdots \\ -v b_{n-1} C_v + (\dots) C_{v-1} + \dots = 0, \end{cases}$$

wodurch C_1, \dots, C_v, \dots der Reihe nach bestimmt werden.

Aus (2), (3) folgt, daß

durch die a_i die α_i eindeutig bestimmt sind,

„ „ a_i und a_{i1} „ „ auch die ϱ_i ,

„ „ a_i, a_{i1}, a_{i2} „ „ „ C_{i1} ,

⋮

„ „ $a_i, a_{i1}, \dots, a_{i, m+1}$ „ „ „ C_{im} .

Aber auch umgekehrt sind durch die α_i die a_i eindeutig bestimmt als elementarsymmetrische Funktionen der α_i , durch die α_i und ϱ_i auch die a_{i1} mittels eines Systems von n linearen unhomogenen Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante

$$(5) \quad A = \begin{vmatrix} 1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{n-1} \\ 1, \alpha_2, \dots, \alpha_2^{n-1} \\ \vdots \\ 1, \alpha_n, \dots, \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden kann, da die α_i alle von einander verschieden sind. Ferner sind durch die

$$\begin{aligned} \alpha_i, \varrho_i, C_{i1} \text{ auch die } a_{i2}, \\ \vdots \\ \alpha_i, \varrho_i, C_{i1}, \dots, C_{im} \text{ auch die } a_{i, m+1} \end{aligned}$$

als Lösungen von Gleichungssystemen mit derselben Koeffizientendeterminante eindeutig bestimmt.

Führt man also jetzt die Abschnittsfunktionen

$$(6) \quad z_i(x) = e^{a_i x} x \varrho_i \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ein, deren lineare Unabhängigkeit unten bewiesen wird, und stellt die Gleichung n -ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} z^{(n)}, z^{(n-1)}, \dots, z', z \\ z_1^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \dots, z_1', z_1 \\ \vdots \\ z_n^{(n)}, z_n^{(n-1)}, \dots, z_n', z_n \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(7) \quad z^{(n)} + Q_1 z^{(n-1)} + \dots + Q_{n-1} z' + Q_n z = 0$$

auf, welche die z_i zu Lösungen hat, so müssen die Entwicklungen der Q_i , die übrigens, wie leicht ersichtlich, rational in $\frac{1}{x}$ sind, und der P_i in den ersten $m+2$ Gliedern übereinstimmen, d. h. es ist

$$Q_i = a_i + \frac{a_{i1}}{x} + \dots + \frac{a_{i, m+1}}{x^{m+1}} + \frac{c_{i, m+2}}{x^{m+2}} + \dots$$

Hieraus folgt

$$(8) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right).$$

Wir schreiben jetzt (1) in der Form

$$(1^*) \quad y^{(n)} + Q_1 y^{(n-1)} + \dots + Q_{n-1} y' + Q_n y = F(y),$$

wo

$$(9) \quad F(y) = (Q_1 - P_1)y^{(n-1)} + (Q_2 - P_2)y^{(n-2)} + \dots + (Q_n - P_n)y$$

ist, und sehen für einen Augenblick $F(y)$ als eine bekannte Funktion an. Dann ist (1*) eine lineare inhomogene Gleichung, deren allgemeines Integral aus dem der zugehörigen homogenen durch die Methode der Variation der Konstanten von Lagrange gefunden wird.

Wir machen also den Ansatz

$$(10) \quad y = \sum_{i=1}^n C_i z_i, \quad y^{(s)} = \sum_{i=1}^n C_i z_i^{(s)}, \quad (s = 1, 2, \dots, n-1)$$

da ja die z_i die Lösungen der homogenen Gleichung sind, und finden auf wohlbekannte Art

$$(11) \quad C_i(x) = \int_{g_i}^x \frac{A_i(u)}{A(u)} F(y(u)) du.$$

Dabei ist

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1' & \dots & z_1^{(n-1)} \\ z_2 & z_2' & \dots & z_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & z_n' & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

die Wronskische Determinante der z_i ; die A_i sind die Unterdeterminanten der letzten Spalte; ferner bedeuten die c_i die willkürlichen Integrationskonstanten und schließlich die g_i beliebige, aber fest gewählte positive Konstante, die nur den Ungleichungen $g_i \geq a$ genügen müssen, wo a die bei Beginn des Paragraphen angegebene Bedeutung hat. Aus (10) folgt jetzt

$$(10^*) \quad y = \sum_{i=1}^n c_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i \int_{g_i}^x \frac{A_i}{A} F(y) du.$$

Um einen einfachen Ausdruck für A zu gewinnen, berücksichtigen wir, daß sich aus (6)

$$(6^*) \quad \begin{aligned} z_i &= e^{a_i x} x^{e_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ z_i' &= a_i e^{a_i x} x^{e_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &\vdots \\ z_i^{(n-1)} &= a_i^{n-1} e^{a_i x} x^{e_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

ergibt. Dann findet man unmittelbar

$$\Delta = e^{\sum_{i=1}^n a_i} x^{\sum_{i=1}^n c_i} \begin{vmatrix} 1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & a_1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots, & a_1^{n-1} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & a_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots, & a_2^{n-1} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & a_n + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots, & a_n^{n-1} + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{vmatrix} = e^{\sum_{i=1}^n a_i} x^{\sum_{i=1}^n c_i} \left(A + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

wo A die in (5) angegebene Bedeutung hat. Nach (2) ist

$$\sum_{i=1}^n a_i = -a_1;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^n c_i = c,$$

so folgt

$$\Delta = e^{-a_1 x} x^c \left(A + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Da A eine von 0 verschiedene Konstante und $O\left(\frac{1}{x}\right)$ eine mit $\frac{1}{x}$ gegen 0 konvergierende Funktion von x ist, kann Δ nicht identisch verschwinden, woraus die lineare Unabhängigkeit der z_i folgt.

Für Δ_1 erhält man unter Benutzung von (6*)

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1} e^{-(a_1 + a_2)x} x^{c-c_1} \left\{ \begin{vmatrix} 1, & a_2, & \dots, & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1, & a_n, & \dots, & a_n^{n-2} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

oder

$$\Delta_1 = e^{-(a_1 + a_2)x} x^{c-c_1} \left(A_1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

und allgemein

$$\Delta_i = e^{-(a_1 + a_i)x} x^{c-c_i} \left(A_i + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

wobei die A_i die Unterdeterminanten der letzten Spalte von A sind. Mithin ist

$$(12) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-a_i x} x^{-c_i} \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

und nach Einsetzen in (10)

$$(13) \quad y = \sum_{i=1}^n c_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\theta_i}^x e^{-a_i u} u^{-c_i} \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) F(y(u)) du,$$

sowie auch

$$(13^*) \quad y^{(s)} = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(s)} + \sum_{i=1}^n z_i^{(s)} \int_{\theta_i}^x e^{-a_i u} u^{-c_i} \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) F(y(u)) du$$

($s = 1, 2, \dots, n-1$).

§ 2.

Integrodifferentialgleichung für y . Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Man kann (13), wenn man darin nach (9) für $F(y)$ wieder den Wert $\sum_{i=1}^n (Q_i - P_i) y^{(n-i)}$ einführt, als eine Funktionalgleichung für y ansehen, die mit (1) äquivalent ist; denn jede Lösung von (1) genügt (13), wenn man den c_i bestimmte Werte beilegt, und jede bei bestimmter Wahl der c_i existierende Lösung von (13) genügt (1).

Wir wählen, wenn k irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$ bedeutet,

$$c_k = 1; \quad c_i = 0, \quad i \leq k$$

und erhalten

$$(14) \quad \begin{aligned} y &= z_k + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\sigma_i}^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du \\ y^{(s)} &= z_k^{(s)} + \sum_{i=1}^n z_i^{(s)} \int_{\sigma_i}^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du \quad (s = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Sei nun b eine beliebige der Ungleichung

$$b > a$$

genügende Zahl, die wir nachher ins Unendliche wachsen lassen, und x auf das Intervall $a \leq x \leq b$ beschränkt. Dann wird¹⁰⁾,

$$\begin{aligned} \text{falls } R(\alpha_i) &\geq R(\alpha_k), & g_i &= b \\ \text{,, } R(\alpha_i) < R(\alpha_k), & g_i &= a \end{aligned}$$

gesetzt. Mithin folgt

$$(14^*) \quad \begin{aligned} y &= z_k + \sum' z_i \int_a^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du + \sum'' z_i \int_b^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du \\ y^{(s)} &= z_k^{(s)} + \sum' z_i^{(s)} \int_a^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du + \sum'' z_i^{(s)} \int_b^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du \end{aligned}$$

($s = 1, 2, \dots, n-1$),

wo die Integrale, bei denen a resp. b als Grenze auftritt, in \sum' resp. in \sum'' zusammengefaßt sind.

Zunächst wollen wir beweisen, daß (14) oder (14^{*}) eine und nur

¹⁰⁾ Den reellen Teil irgend einer Zahl w bezeichnen wir stets mit $R(w)$.

eine Lösung besitzt. Da $F(y) = \sum_{s=0}^{n-1} (Q_{n-s} - P_{n-s}) y^{(s)}$ war, folgt leicht aus (14*)

$$F(y) = F(z_k) + \sum' F(z_i) \int_a^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du + \sum'' F(z_i) \int_b^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y) du.$$

Wir definieren nun, indem wir die abkürzende Bezeichnung

$$\frac{\Delta_i}{\Delta} = E_i$$

benutzen,

$$G(x, u) = \begin{cases} \sum' z_i(x) E_i(u) & a \leq u \leq x \\ -\sum'' z_i(x) E_i(u) & x < u \leq b \end{cases}$$

(es ist gleichgültig, ob man der Funktion $G(x, u)$ auf der Geraden $x = u$ den Wert $\sum' \dots$, wie es hier geschieht, oder den Wert $-\sum'' \dots$ zuschreibt¹¹⁾) und

$$K(x, u) = F(G(x, u)) = \begin{cases} \sum' F(z_i(x)) E_i(u) & a \leq u \leq x \\ -\sum'' F(z_i(x)) E_i(u) & x < u \leq b. \end{cases}$$

Dann können wir schreiben

$$(15) \quad y = z_k + \int_a^b (G(x, u) F(y(u)) du,$$

$$(16) \quad F(y) = F(z_k) + \int_a^b K(x, u) F(y(u)) du.$$

Die letzte Gleichung nimmt, wenn wir

$$F(y) = Y, \quad F(z_k) = Z_k$$

setzen, die Form an

$$(16^*) \quad Y = Z_k + \int_a^b K(x, u) Y(u) du,$$

ist also eine unhomogene lineare Integralgleichung mit unsymmetrischem

¹¹⁾ Beide Werte sind übrigens einander gleich, da offenbar identisch in u

$$\sum_{i=1}^n z_i(u) E_i(u) = \frac{1}{\Delta(u)} \sum_{i=1}^n z_i(u) \Delta_i(u) = 0$$

ist; $G(x, u)$ bleibt also auch auf $x = u$ stetig. Dagegen wird die gleich zu definierende Funktion $K(x, u)$ hier unstetig; denn es ist

$$\sum_{i=1}^n F(z_i(u)) E_i(u) = Q_1(u) - P_1(u) \neq 0.$$

Kerne. Da der Kern $K(x, u)$ nur auf der Geraden $x = u$ durch endlichen Sprung unstetig wird, kann die Fredholmsche Theorie angewandt werden. Diese liefert uns mittels des fundamentalen Satzes Fredholms¹²⁾ das Resultat, daß (16*) eine und nur eine Lösung besitzt, wenn die sog. Determinante D_K von 0 verschieden ist. Wäre nun $D_K = 0$, so müßte die aus (16*) durch Fortlassen von Z_k entstehende homogene Gleichung

$$(17) \quad v(x) = \int_a^b K(x, u) v(u) du$$

eine Lösung haben. Diese wäre von der Form $F(\eta)$, wo η eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1) ist, mithin für $a \leq x \leq b$, da dies Intervall keine singuläre Stelle von (1) enthält, regulär, also jedenfalls stetig. Es bleibt daher noch zu zeigen übrig, daß (17) keine stetige Lösung besitzt. Sei $v(x)$ eine solche. Wir schreiben (17) in der Form

$$(17^*) \quad v(x) = \sum' F(z_i(x)) \int_a^x E_i(u) v(u) du + \sum'' F(z_i(x)) \int_x^b E_i(u) v(u) du.$$

Nun bedeute β irgendeine feste Zahl, die den Ungleichungen genügt

$$R(\beta) < R(\alpha_k) \quad \text{und}$$

$$R(\beta) > R(\alpha_i)$$

für jedes α_i , für das $R(\alpha_i) < R(\alpha_k)$ ist. Bedenkt man, daß

$$z_i(x) = e^{\alpha_i x} x^{\alpha_i} O(1), \quad z_k(x) = e^{\alpha_k x} x^{\alpha_k} O(1),$$

also

$$F(z_i(x)) = e^{\alpha_i x} x^{\alpha_i} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

ist, so folgt aus (17*)

$$\begin{aligned} v(x) e^{-\beta x} x^{-\beta} &= \sum' O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) e^{(\alpha_i - \beta)x} x^{\alpha_i - \beta} \int_a^x E_i(u) v(u) du \\ &+ \sum'' O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) e^{(\alpha_i - \beta)x} x^{\alpha_i - \beta} \int_x^b E_i(u) v(u) du. \end{aligned}$$

Die Funktion $v(x) e^{-\beta x} x^{-\beta}$ ist für $a \leq x \leq b$ stetig, ebenso ihr Betrag; die letztere Funktion besitzt also im Intervalle $a \leq x \leq b$ ein Maximum. Wir setzen

$$\text{Max} |v(x) e^{-\beta x} x^{-\beta}| = M.$$

Ferner schreiben wir zur Abkürzung

$$R(\alpha_i - \beta) = p_i, \quad R(\alpha_i - \alpha_k) = q_i.$$

¹²⁾ Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles; Acta math. 27, S. 373.

Da

$E_i(u)v(u) = O(1)e^{-\sigma_i u} u^{-c_i} v(u) = O(1)e^{-(\sigma_i - \beta)u} u^{-(c_i - c_k)} v(u) e^{-\beta u} u^{-c_k}$
ist, folgt leicht

$$|v(x)e^{-\beta x} x^{-c_k}| \leq \sum' e^{p_i x} x^{\sigma_i} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) \int_a^x M O(1) e^{-p_i u} u^{-\sigma_i} du \\ + \sum'' e^{p_i x} x^{\sigma_i} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) \int_x^b M O(1) e^{-p_i u} u^{-\sigma_i} du.$$

Es sind also jetzt Ausdrücke der Form

$$J = \frac{e^{p_i x} x^{\sigma_i}}{x^{m+2}} \left| \int_{p_i}^x e^{-p_i u} u^{-\sigma_i} du \right|$$

abzuschätzen, wo $g_i = a$ oder $= b$ ist, je nachdem $p_i < 0$ oder $p_i > 0$ ist. (Der Fall $p_i = 0$ kann nicht eintreten.)

Behandeln wir zuerst den Fall $p_i < 0$, so wird

$$J = \frac{e^{p_i x} x^{\sigma_i}}{x^{m+2}} \int_a^x e^{-p_i u} u^{-\sigma_i} du < e^{p_i x} x^{\sigma_i} \int_a^x \frac{e^{-p_i u} u^{-\sigma_i}}{u^{m+2}} du = H(x),$$

also

$$x^{m+2} H(x) = \frac{\int_a^x e^{-p_i u} u^{-(m+2+\sigma_i)} du}{e^{-p_i x} x^{-(m+2+\sigma_i)}}.$$

Dieser Ausdruck nimmt, wenn man x unendlich groß werden läßt, die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an; sein Grenzwert ist daher gleich dem Grenzwerte der Ableitungen von Zähler und Nenner. Demnach wird

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{m+2} H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-p_i x} x^{-(m+2+\sigma_i)}}{e^{-p_i x} x^{-(m+2+\sigma_i)}} \cdot \frac{1}{-\left(p_i + \frac{\sigma_i + m + 2}{x}\right)} = -\frac{1}{p_i};$$

$$\text{flgl. } J = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right).$$

Im Falle $p_i > 0$ ist

$$J = \frac{1}{x^{m+2}} \int_x^b \frac{e^{p_i x} x^{\sigma_i}}{e^{p_i u} u^{\sigma_i}} du.$$

Bedeutet p eine beliebige, den Ungleichungen

$$0 < p < p_i$$

genügende Zahl, so ist die Funktion

$$h(x) = e^{(p_i - p)x} x^{\sigma_i}$$

von einem genügend großen Werte von x an ständig zunehmend; es ist nämlich

$$h'(x) = e^{(p_1-p)x} x^{\sigma_1} \left(p_1 - p + \frac{\sigma_1}{x} \right) > 0,$$

da $p_1 - p > 0$ ist und $\frac{\sigma_1}{x}$ mit wachsendem x gegen 0 konvergiert. Die obige Ungleichung für $h'(x)$ gilt offenbar, sobald

$$x > -\frac{\sigma_1}{p_1 - p}$$

ist; es kann aber tatsächlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$a > -\frac{\sigma_1}{p_1 - p}$$

angenommen werden. Berücksichtigt man nun, daß $x \leq u$ ist, so folgt

$$\frac{e^{(p_1-p)x} x^{\sigma_1}}{e^{(p_1-p)u} u^{\sigma_1}} \leq 1,$$

mithin

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{x^{m+2}} \int_x^b \frac{e^{(p_1-p)x} x^{\sigma_1}}{e^{(p_1-p)u} u^{\sigma_1}} \cdot \frac{e^{px}}{e^{pu}} du \\ &< \frac{e^{px}}{x^{m+2}} \int_x^b e^{-pu} du = \frac{e^{px}}{x^{m+2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{e^{px}} - \frac{1}{e^{pb}} \right) \\ &< \frac{e^{px}}{px^{m+2}} \cdot \frac{1}{e^{px}} = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right). \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung für $v(x)$ ergibt sich jetzt unmittelbar

$$|v(x) e^{-\beta x} x^{-\epsilon_k}| < M O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right),$$

also, wenn das Maximum M etwa in $x = x_1$ erreicht wird,

$$M < \frac{MO(1)}{x_1^{m+2}} \leq \frac{MO(1)}{a^{m+2}},$$

folglich nach Division mit M

$$1 < \frac{O(1)}{a^{m+2}};$$

diese Ungleichung ist aber, wenn a von vornherein genügend groß gewählt wird, unmöglich. Daher hat (17) keine Lösung, w. z. b. w. Mithin hat (16) tatsächlich eine und nur eine Lösung. Diese wollen wir mit $Y_k^{(b)}$ bezeichnen. Aus ihr ergibt sich die Lösung $y_k^{(b)}$ von (15) oder (14*) mittels

$$y_k^{(b)} = z_k + \int_a^b G(x, u) Y_k^{(b)}(u) du$$

oder

$$y_k^{(b)} = z_k + \sum' z_i \int_a^x E_i(u) Y_k^{(b)}(u) du + \sum'' z_i \int_b^x E_i(u) Y_k^{(b)}(u) du,$$

wo nun die rechte Seite als bekannt anzusehen ist.

§ 3.

Existenz der Grenzfunktion. Asymptotische Darstellung derselben.

Für $y_k^{(b)}$ wollen wir jetzt eine fundamentale Ungleichung ableiten. Als Ausgangspunkt dient die Gleichung (14), aus der sich unmittelbar

$$(14^{**}) \quad y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k} = 1 + \frac{C_{k1}}{x} + \dots + \frac{C_{km}}{x^m} \\ + \sum' O(1) e^{(a_i - a_k)x} x^{c_i - c_k} \int_a^x E_i F(y_k^{(b)}) du \\ + \sum'' O(1) e^{(a_i - a_k)x} x^{c_i - c_k} \int_b^x E_i F(y_k^{(b)}) du$$

nebst entsprechenden Gleichungen für die Ableitungen $(y_k^{(b)})^{(s)}$ [$s=1, 2, \dots, n-1$] ergibt. Wir setzen das für $a \leq x \leq b$ genommene

$$\text{Max } |y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k}| = M_0^{(b)}, \quad \text{Max } |(y_k^{(b)})^{(s)} e^{-a_k x} x^{-c_k}| = M_s^{(b)}, \quad (s=1, 2, \dots, n-1)$$

ferner

$$\text{Max } (M_0^{(b)}, \dots, M_{n-1}^{(b)}) = M^{(b)}.$$

Wie oben sei

$$R(\varrho_i - \varrho_k) = \sigma_i, \quad \text{außerdem} \quad R(\alpha_i - \alpha_k) = r_i.$$

Bedenkt man, daß

$$|F(y_k^{(b)}(u)) e^{-a_k u} u^{-c_k}| \leq |Q_1 - P_1| |(y_k^{(b)})^{(n-1)} e^{-a_k u} u^{-c_k}| + \dots + |Q_n - P_n| |y_k^{(b)} e^{-a_k u} u^{-c_k}| \\ = O\left(\frac{1}{u^{m+2}}\right) M_{n-1}^{(b)} + \dots + O\left(\frac{1}{u^{m+2}}\right) M_0^{(b)} \\ = O\left(\frac{1}{u^{m+2}}\right) M^{(b)}$$

ist, so findet man durch Abschätzungen, welche denen des vorigen Paragraphen fast völlig entsprechen,

$$|y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k}| \leq 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) M^{(b)};$$

man wird nämlich zu Ausdrücken der Form

$$J = e^{r_i x} x^{\sigma_i} \left| \int_{\varrho_i}^x \frac{e^{-r_i u} u^{-\sigma_i}}{u^{m+2}} du \right|$$

geführt, wo $g_i = a$ oder $g_i = b$ ist, je nachdem $r_i < 0$ oder $r_i \geq 0$ ist. Sie unterscheiden sich von den Ausdrücken J des vorigen Paragraphen dadurch, daß statt $\frac{1}{x^{m+2}}$ vor dem Integral $\frac{1}{u^{m+2}}$ im Integral auftritt. Der Fall $r_i < 0$ ist bereits oben untersucht worden. Ist nun $r_i > 0$, so findet man, da $e^{r_i x} x^{\sigma_i}$ mit wachsendem x ständig zunimmt,

$$J < \int_x^b \frac{du}{u^{m+2}} = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Da hier der Fall $r_i = 0$ stets vorkommt, müssen wir noch

$$J = x^{\sigma_i} \int_x^b \frac{du}{u^{m+2+\sigma_i}}$$

behandeln. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit m so groß annehmen, daß für jedes σ_i

$$m+1+\sigma_i > 0$$

ist. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} J &= \frac{x^{\sigma_i}}{m+1+\sigma_i} \left(\frac{1}{x^{m+1+\sigma_i}} - \frac{1}{b^{m+1+\sigma_i}} \right) \\ &< \frac{x^{\sigma_i}}{(m+1+\sigma_i)x^{m+1+\sigma_i}} = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Wir wollen nun beweisen, daß $M^{(b)}$ bei wachsendem b beschränkt bleibt. Aus der obigen fundamentalen Ungleichung für $y_k^{(b)}$ folgt, wenn das Maximum $M_0^{(b)}$ etwa in $x = x_1$ erreicht wird,

$$M_0^{(b)} < 1 + \frac{O(1)}{x_1} + \frac{M^{(b)} O(1)}{x_1^{m+1}} \leq 1 + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}}.$$

Behandelt man die Ableitungen $(y_k^{(b)})^{(s)}$ ebenso wie $y_k^{(b)}$ selbst, so findet man

$$M_s^{(b)} < |\alpha_k|^s + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ist also

$$\mu = \text{Max} (1, |\alpha_k|, \dots, |\alpha_k|^{n-1}),$$

so erhält man

$$M^{(b)} < \mu + \frac{O(1)}{a} + \frac{O(1)M^{(b)}}{a^{m+1}},$$

$$M^{(b)} \left(1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}}\right) < \mu + \frac{O(1)}{a}.$$

Wird daher a so groß gewählt, daß etwa

$$1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}} > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{O(1)}{a} < \mu$$

ist, so liefert die Ungleichung

$$\frac{1}{2} M^{(b)} < 2\mu, \quad M^{(b)} < 4\mu$$

die Beschränktheit von $M^{(b)}$.

Auf Grund der obigen Abschätzungen kann man der Gleichung (14**) die Form geben

$$y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k} = 1 + \frac{C_{k1}}{x} + \dots + \frac{C_{km}}{x^m} + M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Da aber jetzt $M^{(b)}$ als beschränkt nachgewiesen ist, kann man statt $M^{(b)}$ einfach $O(1)$ schreiben und findet

$$(18) \quad y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k} = 1 + \frac{C_{k1}}{x} + \dots + \frac{C_{km}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

wobei x im Intervalle $a \leq x \leq b$ variieren muß. Demnach ist jedenfalls $y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-c_k}$ bei wachsendem b beschränkt. Um nun zu zeigen, daß die Grenzfunktion

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} y_k^{(b)} = y_k$$

existiert, verfahren wir folgendermaßen. Wir wählen irgend zwei Zahlen b_1, b_2 , welche den Ungleichungen $b_2 > b_1 > a$ genügen. Die zugehörigen Funktionen $y_k^{(b_1)}, y_k^{(b_2)}$ sind die einzigen Lösungen der Gleichungen

$$y_k^{(b_1)} = z_k + \sum' z_i \int_a^x E_i F(y_k^{(b_1)}) du + \sum'' z_i \int_{b_1}^x E_i F(y_k^{(b_1)}) du$$

resp.

$$y_k^{(b_2)} = z_k + \sum' z_i \int_a^x E_i F(y_k^{(b_2)}) du + \sum'' z_i \int_{b_2}^x E_i F(y_k^{(b_2)}) du.$$

Führt man die Bezeichnung

$$y_k^{(b_2)}(x) - y_k^{(b_1)}(x) = w_k(x; b_1, b_2) = w$$

ein, so findet man leicht

$$w e^{-a_k x} x^{-c_k} = \sum' z_i e^{-a_k x} x^{-c_k} \int_a^x E_i F(w) du + \sum'' z_i e^{-a_k x} x^{-c_k} \int_{b_1}^x E_i F(w) du \\ + \sum'' z_i e^{-a_k x} x^{-c_k} \int_{b_2}^{b_1} E_i F(y_k^{(b_1)}) du.$$

Wir setzen nun das für $a \leq x \leq b_1$ genommene

$$\text{Max} |w e^{-a_k x} x^{-c_k}| = M_0^{(b_1, b_2)}, \quad \text{Max} |w^{(s)} e^{-a_k x} x^{-c_k}| = M_s^{(b_1, b_2)} (s = 1, 2, \dots, n-1),$$

ferner

$$\text{Max} (M_0^{(b_1, b_2)}, \dots, M_{n-1}^{(b_1, b_2)}) = M^{(b_1, b_2)}.$$

Zuerst schätzen wir die Summe

$$\sum'' z_i e^{-a_k x} x^{-c_k} \int_{b_2}^{b_1} E_i F(y_k^{(b_1)}) du$$

ab, wobei wir berücksichtigen, daß $y_k^{(b_k)} e^{-a_k x} x^{-e_k}$ bereits als bei wachsendem b_k beschränkt nachgewiesen ist. Wir schreiben

$$\begin{aligned} z_i(x) e^{-a_k x} x^{-e_k} \int_{b_1}^{b_2} F(y_k^{(b_k)}) E_i du \\ = \frac{z_i(x) e^{-a_k x} x^{-e_k}}{z_i(b_1) e^{-a_k b_1} b_1^{-e_k}} \cdot z_i(b_1) e^{-a_k b_1} b_1^{-e_k} \int_{b_1}^{b_2} E_i F(y_k^{(b_k)}) du = A_i \cdot B_i, \end{aligned}$$

$$A_i = \frac{1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m}}{1 + \frac{C_{i1}}{b_1} + \dots + \frac{C_{im}}{b_1^m}} e^{(a_i - a_k)(x - b_1)} \left(\frac{x}{b_1}\right)^{e_i - e_k}, \quad B_i = z_i(b_1) e^{-a_k b_1} b_1^{-e_k} \int_{b_1}^{b_2} E_i F(y_k^{(b_k)}) du.$$

Analog den früheren Abschätzungen ergibt sich

$$B_i = O\left(\frac{1}{b_1^{m+1}}\right).$$

Ferner findet man leicht, wenn man $R(a_i - a_k) \geq 0$ und $x - b_1 \leq 0$ bedenkt,

$$A_i = \begin{cases} O(1) & \text{für } \sigma_i \geq 0 \\ O\left(\frac{1}{b_1^{\sigma_i}}\right) & \text{,, } \sigma_i < 0. \end{cases}$$

Demnach wird unser Ausdruck

$$A_i B_i = O\left(\frac{1}{b_1^{m+1+\delta_i \sigma_i}}\right), \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma_i \geq 0 \\ 1 & \text{,, } \sigma_i < 0. \end{cases}$$

Nun ist aber m so groß gewählt (s. o.), daß stets

$$m + 1 + \delta_i \sigma_i = e_i > 0$$

ist. Demnach wird

$$A_i B_i = O\left(\frac{1}{b_1^{e_i}}\right)$$

mit wachsendem b_1 unendlich klein, und zwar kann man durch Wahl von m die Ordnung des Unendlichkleinwerdens beliebig hoch machen. Für $M^{(b_1, b_2)}$ findet man jetzt mittels der bekannten Abschätzungen

$$M^{(b_1, b_2)} < \frac{M^{(b_1, b_2)} O(1)}{a^{m+1}} + O\left(\frac{1}{b_1^e}\right),$$

wenn e die kleinste der Größen e_i bedeutet, oder

$$M^{(b_1, b_2)} \left(1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}}\right) < O\left(\frac{1}{b_1^e}\right)$$

und, wenn etwa

$$1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}} > \frac{1}{2}$$

angenommen wird,

$$M^{(b_1, b_2)} < O\left(\frac{1}{b_1^e}\right).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\lim_{b_1 \rightarrow +\infty} M^{(b_1, b_2)} = 0,$$

also auch

$$\lim_{b_1 \rightarrow +\infty} M_s^{(b_1, b_2)} = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Mithin wird

$$\lim_{b_1 \rightarrow +\infty} |(y_k^{(b_1)}(x) - y_k^{(b_2)}(x)) e^{-a_k x} x^{-b_k}| = 0$$

gleichmäßig für alle x aus dem Intervalle $a \leq x \leq b_1$. Daher existiert die Grenzfunktion

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} y_k^{(b)}(x) e^{-a_k x} x^{-b_k} = f_k(x)$$

für jedes $x \geq a$, und zwar vollzieht sich die gleichmäßige Konvergenz gegen f_k in der Weise, daß

$$|f_k - y_k^{(b)} e^{-a_k x} x^{-b_k}| = O\left(\frac{1}{b^s}\right)$$

ist für alle x aus dem Intervalle $a \leq x \leq b$. Da auch $e^{a_k x} x^{b_k}$ für jedes endliche x einen Sinn hat, so existiert auch

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} y_k^{(b)} = y_k$$

für jedes endliche $x \geq a$. Ebenso existieren die Grenzfunktionen

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (y_k^{(b)})^{(s)}$$

zunächst für $s = 1, 2, \dots, n-1$. Aber auch die Existenz von

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (y_k^{(b)})^{(n)}$$

ergibt sich jetzt leicht, wenn man die aus

$$(y_k^{(b)})^{(n-1)} = z_k^{(n-1)} + \sum' z_i^{(n-1)} \int_a^x E_i F(y_k^{(b)}) du + \sum'' z_i^{(n-1)} \int_b^x E_i F(y_k^{(b)}) du$$

folgende Gleichung

$$\begin{aligned} (y_k^{(b)})^{(n)} &= z_k^{(n)} + \sum' z_i^{(n)} \int_a^x E_i F(y_k^{(b)}) du + \sum'' z_i^{(n)} \int_b^x E_i F(y_k^{(b)}) du \\ &\quad + \sum_{i=1}^n z_i^{(n-1)} E_i F(y_k^{(b)}) \end{aligned}$$

benutzt. Man findet so

$$\begin{aligned} w^{(n)}(x) &= \sum' z_i^{(n)}(x) \int_a^x E_i F(w) du + \sum'' z_i^{(n)}(x) \int_{b_1}^x E_i F(w) du \\ &\quad + \sum_{i=1}^n z_i^{(n)}(x) \int_{b_2}^{b_1} E_i F(y_k^{(b)}) du + \sum_{i=1}^n z_i^{(n-1)}(x) E_i(x) F(w(x)). \end{aligned}$$

Setzt man das für $a \leq x \leq b_1$ genommene

$$\text{Max } |w^{(n)} e^{-a_k x} x^{-c_k}| = M^{(b_1, b_2)},$$

so wird

$$M_n^{(b_1, b_2)} < \frac{M^{(b_1, b_2)} O(1)}{a^{m+1}} + O\left(\frac{1}{b_1^s}\right) = O\left(\frac{1}{b_1^s}\right),$$

woraus die Existenz des Limes folgt.

Daß

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (y_k^{(b)})^{(s)} = y_k^{(s)} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

ist, d. h. daß der Grenzwert der s -ten Ableitung gleich der s -ten Ableitung des Grenzwertes ist, ergibt sich in bekannter Weise aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz.

Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß y_k tatsächlich eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung (1) ist. Setzt man

$$(y_k^{(b)})^{(n)} + P_1 (y_k^{(b)})^{(n-1)} + \dots + P_n y_k^{(b)} \equiv G(x, b),$$

so verschwindet $G(x, b)$ identisch in b und x für $b > a$ und $x \geq a$. Daher ist auch $\lim_{b \rightarrow +\infty} G(x, b) = 0$ für $x \geq a$. Geht man also mit b zur Grenze über, so folgt

$$y_k^{(n)} + P_1 y_k^{(n-1)} + \dots + P_n y_k = \lim_{b \rightarrow +\infty} G(x, b) = 0.$$

Die asymptotische Darstellung für y_k ergibt sich nun sehr einfach. Man findet nämlich aus (18) durch den Grenzübergang $b \rightarrow +\infty$

$$(18^*) \quad y_k e^{-a_k x} x^{-c_k} = 1 + \frac{C_{k1}}{x} + \dots + \frac{C_{km}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

worin nun x nur durch die Ungleichung $x \geq a$ beschränkt ist. Aus (18*) erhält man die Poincarésche Limesgleichung

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y_k e^{-a_k x} x^{-c_k} - 1 - \frac{C_{k1}}{x} - \dots - \frac{C_{km}}{x^m} \right) x^m = 0.$$

Man kann (18*) auch in der Form schreiben

$$(18^{**}) \quad y_k = z_k + e^{a_k x} x^{c_k} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

für die Ableitungen findet man

$$(18^{***}) \quad z_k^{(s)} = z_k^{(s)} + e^{a_k x} x^{c_k} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Zum Schluß bemerken wir noch, um den Beweis für die asymptotische Darstellung zu vollenden, daß auch für jeden Index $r \geq m$ die Gleichung

$$y_k = e^{a_k x} x^{c_k} \left(1 + \frac{C_{k1}}{x} + \dots + \frac{C_{kr}}{x^r} + O\left(\frac{1}{x^{r+1}}\right) \right)$$

besteht.

Diese ist für $\nu < m$ evident. Um sie auch für $\nu > m$ nachzuweisen, führt man die Abschnittsfunktionen

$$\bar{z}_i(x) = e^{\alpha_i x} x^{c_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{i\nu}}{x^\nu} \right)$$

ein, gelangt mit deren Hilfe zu den Integralen

$$\bar{y}_i(x)$$

und zeigt, daß

$$y_k = \bar{y}_k + \sum_i^+ C_i \bar{y}_i$$

gesetzt werden kann, wobei in

$$\sum_i^+ C_i \bar{y}_i$$

nur einige der Funktionen \bar{y}_i auftreten und zwar nur diejenigen, bei denen die zugehörigen α -Werte kleinere reelle Teile als α_k haben. Daraus ergibt sich unmittelbar die Darstellung für $\nu > m$. (Für die genaue Durchführung dieses Verfahrens vgl. Horn: „Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für große Werte der Veränderlichen.“ J. f. Math. 138, S. 181 ff.).

§ 4.

Differentialgleichungen von beliebigem Range.

Die Koeffizienten von

$$(1) \quad y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = 0$$

mögen jetzt die Form

$$P_i = x^{ik} p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

haben.

Dabei ist, wie früher P_i selbst, jetzt

$$p_i = a_i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{i\nu}}{x^\nu}$$

oder

$$p_i \sim a_i + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{i\nu}}{x^\nu}.$$

Ferner bedeutet k eine nicht negative ganze Zahl. Man sagt dann, die Differentialgleichung habe den Rang $k+1$).

Die charakteristische Gleichung

$$(2) \quad f(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

soll wieder n verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ besitzen. Dann existieren n die Gleichung (1) formal befriedigende Entwicklungen¹³⁾

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\alpha_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots \right).$$

Hierbei ist $\gamma_i(x)$ ein Polynom vom Grade $k+1$, und zwar wird

$$\gamma_i'(x) = \alpha_i x^k + \alpha_{i1} x^{k-1} + \dots + \alpha_{ik},$$

$$\gamma_i(x) = \frac{\alpha_i}{k+1} x^{k+1} + \frac{\alpha_{i1}}{k} x^k + \dots + \alpha_{ik} x.$$

Die folgenden Ausführungen entsprechen fast völlig denen der vorigen Paragraphen; doch muß natürlich überall $\gamma_i(x)$ an Stelle von $\alpha_i x$ treten. Nachdem die α_i durch (2) bestimmt sind, findet man die $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}, \alpha_i, C_{i1}, C_{i2}, \dots$, aus Gleichungen 1. Grades mittels Rekursionsformeln. In jeder dieser Gleichungen ist der Koeffizient der Unbekannten ein ganzzahliges Vielfaches von $f'(\alpha_i)$, also von 0 verschieden, sodaß die Bestimmung stets möglich ist.

| | |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Durch die α_i | sind die α_i eindeutig bestimmt. |
| „ „ α_i' und α_{i1} | auch die α_{i1} . |
| „ „ $\alpha_i, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}$ | „ „ α_{ik} . |
| „ „ $\alpha_i, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i, k+1}$ | „ „ $\alpha_{i, k+1}$. |
| „ „ $\alpha_i, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i, k+2}$ | „ „ $\alpha_{i, k+2}$. |
| „ „ $\alpha_i, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i, k+m+1}$ | „ „ $\alpha_{i, k+m+1}$. |

Es gilt aber auch wieder das Umgekehrte, d. h. durch die α_i sind die α_i

¹³⁾ Vgl. Thomé „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“. J. f. Math. 76, S. 273–302.

Thomé führt die Untersuchung für eine im Endlichen gelegene singuläre Stelle durch. Die Rechnungen gestalten sich aber übersichtlicher, wenn man $x = \infty$ benutzt, was sich ja durch Transformation der unabhängigen Variablen stets ermöglichen läßt. Im Falle des Ranges 1 sind die Funktionen $P_i(x)$ in $x = \infty$ regulär; im Falle eines höheren Ranges hat wenigstens eine von ihnen einen Pol (wenn vorausgesetzt wird, daß das Zeichen = und nicht \sim gilt). Hat umgekehrt wenigstens eine der Funktionen $P_i(x)$ in $x = \infty$ einen Pol, so ist die Gleichung von höherem als erstem Range.

Die Zahl k wird folgendermaßen bestimmt: Sei $P_i = x^{q_i} \left(A_i + \frac{A_{i1}}{x} + \dots \right)$ für $i = 1, 2, \dots, n$, wo $A_i \neq 0$ und q_i eine ganze Zahl ist. Wir setzen $m_i = q_i$ für $q_i \geq 0$ und $m_i = 0$ für $q_i < 0$. Dann ist $k = \text{Max} \left(m_1, \left[\frac{m_2+1}{2} \right], \left[\frac{m_3+2}{3} \right], \dots, \left[\frac{m_n+n-1}{n} \right] \right)$, wenn, wie üblich, $[g]$ die größte in g enthaltene ganze Zahl bedeutet.

eindeutig bestimmt, ... durch die $a_i, a_{i1}, \dots, a_{ik}, e_i, C_{i1}, \dots, C_{im}$ die $a_i, a_{i1}, \dots, a_{i, k+m+1}$. Führt man daher jetzt die Abschnittsfunktionen

$$(19) \quad z_i = e^{\gamma_i(s)} x^{c_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} \right)$$

ein, deren lineare Unabhängigkeit unten bewiesen werden wird, stellt die Gleichung n -ter Ordnung

$$(20) \quad z^{(n)} + Q_1 z^{(n-1)} + \dots + Q_n z = 0$$

auf, welche die z_i zu Lösungen hat, und setzt

$$Q_i = x^{ik} q_i,$$

so stimmen die Entwicklungen der q_i , die rational in $\frac{1}{x}$ sind, und der p_i in den ersten $k+m+2$ Gliedern überein.

Daraus schließt man

$$(21) \quad \begin{cases} p_i - q_i = O\left(\frac{1}{x^{k+m+2}}\right) \\ \text{oder} \\ p_i - q_i = O\left(\frac{x^{(k-1)k}}{x^{m+2}}\right). \end{cases}$$

(24)

Ebenso wie früher kann man von

$$(1^*) \quad y^{(n)} + Q_1 y^{(n-1)} + \dots + Q_n y = (Q_1 - P_1) y^{(n-1)} + \dots + (Q_n - P_n) y = F(y)$$

übergehen zu

$$(22) \quad \begin{cases} y = \sum_{i=1}^n c_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i \int_{q_i}^x \frac{A_i}{A} F(y) du, \\ y^{(s)} = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{(s)} + \sum_{i=1}^n z_i^{(s)} \int_{q_i}^x \frac{A_i}{A} F(y) du \quad (s = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Man findet hier unter Berücksichtigung von

$$z_i = e^{\gamma_i} x^{c_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

$$z_i' = e^{\gamma_i} x^{c_i} \left\{ \left(\gamma_i' + \frac{c_i}{x} \right) \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} \right) - \frac{C_{i1}}{x^2} - \dots - \frac{m C_{im}}{x^{m+1}} \right\}$$

$$= \gamma_i' e^{\gamma_i} x^{c_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

und allgemein

$$z_i^{(s)} = (\gamma_i')^s e^{\gamma_i} x^{c_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

für die Determinanten Δ und Δ_i folgende Abschätzungen:

$$\Delta = e^{\sum_{i=1}^n \gamma_i} x^{\sum_{i=1}^n \varrho_i + \frac{n(n-1)k}{2}} \left(A + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

woraus die lineare Unabhängigkeit der z_i folgt, und

$$\Delta_i = e^{\sum_{j=1}^n \gamma_j - \gamma_i} x^{\sum_{j=1}^n \varrho_j - \varrho_i + \frac{(n-1)(n-2)k}{2}} \left(A_i + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

mithin

$$(23) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-\gamma_i} x^{-[\varrho_i + (n-1)k]} \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

was in den oben für y und $y^{(s)}$ angegebenen Formeln (22) einzusetzen ist.

Setzt man $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$, so ergibt sich eine Integrodifferentialgleichung, die eine und nur eine Lösung $y_1^{(b)}$ besitzt, was man wie in § 2 durch Zurückführung auf eine Fredholmsche Integralgleichung zeigen kann:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(b)} = z_1 + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\varrho_i}^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y_1^{(b)}) du \\ \text{oder} \\ y_1^{(b)} = e^{\gamma_1} x^{\varrho_1} \left(1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1n}}{x^n} \right) \\ \quad + \sum_{i=1}^n e^{\gamma_i} x^{\varrho_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{in}}{x^n} \right) \int_{\varrho_i}^x e^{-\gamma_i} u^{-[\varrho_i + (n-1)k]} \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) F(y_1^{(b)}) du \end{array} \right.$$

und

$$(24^*) \quad (y_1^{(b)})^{(s)} = z_1^{(s)} + \sum_{i=1}^n z_i^{(s)} \int_{\varrho_i}^x \frac{\Delta_i}{\Delta} F(y_1^{(b)}) du \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

Nun sei für $a \leq x \leq b$

$$\text{Max} |y_1^{(b)} e^{-\gamma_1} x^{-\varrho_1}| = M_0^{(b)},$$

und

$$\text{Max} |(y_1^{(b)})^{(s)} e^{-\gamma_i} x^{-\varrho_i}| = M_s^{(b)} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1)$$

Dann ist, da ja

$$\text{Max}(M_0^{(b)}, M_1^{(b)}, \dots, M_{n-1}^{(b)}) = M^{(b)}.$$

$$F(y_1^{(b)}) = \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s) (y_1^{(b)})^{(n-s)}$$

war,

$$\begin{aligned} & F(y_1^{(b)}) e^{-\gamma_1} x^{-[\varrho_1 + (n-1)k]} \\ &= \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s) x^{(1-s)k} (y_1^{(b)})^{(n-s)} e^{-\gamma_1} x^{-[\varrho_1 + (n-s)k]}, \end{aligned}$$

mithin, da

$$(Q_s - P_s) x^{(1-s)k} = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

war,

$$|F(y_1^{(b)}) e^{-\gamma_1} x^{-[e_1 + (n-1)k]}| = \sum_{s=1}^n M_{n-s}^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) = M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right).$$

Ferner hat man nach (24)

$$y_1^{(b)} e^{-\gamma_1} x^{-e_1} = 1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}$$

$$+\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i - \gamma_1} x^{e_i - e_1} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m}\right) \int_{\theta_i}^x e^{-(\gamma_i - \gamma_1) u - (e_i - e_1)} \left(\frac{\Lambda_i}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) F(y_1^{(b)}) e^{-\gamma_1} u^{-[e_1 + (n-1)k]} du$$

sowie nach (24*)

$$(y_1^{(b)})^{(s)} e^{-\gamma_1} x^{-[e_1 + sk]} = \frac{(\gamma_1')^s}{x^{sk}} + O\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{i=1}^n e^{\gamma_i - \gamma_1} x^{e_i - e_1} \left(\frac{(\gamma_i')^s}{x^{sk}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \int_{\theta_i}^x \dots$$

für $s = 1, 2, \dots, n-1$.

Da nun offenbar

$$\frac{\gamma_i'}{x^k} = \alpha_i + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{(\gamma_i')^s}{x^{sk}} = \alpha_i^s + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist, so folgt man leicht

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(b)} e^{-\gamma_1} x^{-e_1} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{i=1}^n e^{\gamma_i - \gamma_1} x^{e_i - e_1} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \int_{\theta_i}^x \dots \\ \text{und} \\ (y_1^{(b)})^{(s)} e^{-\gamma_1} x^{-e_1} = \alpha_1^s + O\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{i=1}^n e^{\gamma_i - \gamma_1} x^{e_i - e_1} \left(\alpha_i^s + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \int_{\theta_i}^x \dots \end{array} \right.$$

Nun muß

$$J = e^{\gamma_i - \gamma_1} x^{e_i - e_1} \int_{\theta_i}^x \left(\frac{\Lambda_i}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) e^{-(\gamma_i - \gamma_1) u - (e_i - e_1)} F(y_1^{(b)}) e^{-\gamma_1} u^{-[e_1 + (n-1)k]} du$$

untersucht werden. Führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{R(\alpha_i - \alpha_1)}{k+1} = r_i, \quad \frac{R(\alpha_{i1} - \alpha_{11})}{k} = r_{i1}, \dots, R(\alpha_{ik} - \alpha_{1k}) = r_{ik},$$

$$R(e_i - e_1) = \alpha_i,$$

$$R(\gamma_i(x) - \gamma_1(x)) = h_i(x)$$

für $i = 1, 2, \dots, n$ ein, so wird

$$h_i(x) = r_i x^{k+1} + r_{i1} x^k + \dots + r_{ik} x,$$

und es folgt leicht

$$|J| \leq e^{\lambda_i(x)} x^{\sigma_i} \left| \int_{\nu_i}^x e^{-\lambda_i(u)} u^{-\sigma_i} M^{(b)} O\left(\frac{1}{u^{m+2}}\right) du \right|.$$

Lassen wir zur Abkürzung den Index i weg, dann handelt es sich um

$$e^{\lambda(x)} x^{\sigma} \left| \int_g^x \frac{e^{-\lambda(u)} du}{u^{m+2+\sigma}} \right| = e^{rx^{k+1} + r_1 x^k + \dots + r_k x} x^{\sigma} \left| \int_g^x \frac{e^{-(ru^{k+1} + r_1 u^k + \dots + r_k u)}}{u^{m+2+\sigma}} du \right|.$$

Ist zunächst $r > 0$, so setzen wir $g = b$. Nun ist von einer bestimmten Stelle an die Funktion $G(x) = e^{\lambda(x)} x^{\sigma}$ ständig zunehmend. Es gilt nämlich

$$G'(x) = e^{\lambda(x)} x^{\sigma} \left(\lambda'(x) + \frac{\sigma}{x} \right) > 0,$$

wenn

$$\lambda'(x) + \frac{\sigma}{x} > 0$$

oder

$$(k+1)rx^k + kr_1 x^{k-1} + \dots + r_k x + \frac{\sigma}{x} > 0$$

oder

$$(k+1)rx^k \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) > 0,$$

und diese Ungleichung ist offenbar erfüllt, wenn x eine gewisse Grenze, etwa d , überschritten hat. Ist also $a > d$, was man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, so wird in unserem Integral

$$\frac{e^{\lambda(x)} x^{\sigma}}{e^{\lambda(u)} u^{\sigma}} \leq 1$$

wegen $x \leq u$, mithin

$$\int_x^b \frac{e^{\lambda(x)} x^{\sigma}}{e^{\lambda(u)} u^{\sigma}} \cdot \frac{du}{u^{m+2}} \leq \int_x^b \frac{du}{u^{m+2}} = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Wir kommen nun zu $r < 0$ und setzen $g = a$. Dann handelt es sich um

$$H(x) = e^{\lambda(x)} x^{\sigma} \int_a^x e^{-\lambda(u)} u^{-(m+2+\sigma)} du.$$

Es wird

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{m+2} H(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^x e^{-\lambda(u)} u^{-(m+2+\sigma)} du}{e^{-\lambda(x)} x^{-(m+2+\sigma)}} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda(x)} x^{-(m+2+\sigma)}}{e^{-\lambda(x)} x^{-(m+2+\sigma)}} \cdot \frac{1}{-\lambda'(x) - \frac{m+2+\sigma}{x}} = 0, \end{aligned}$$

also jedenfalls

$$H(x) = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right).$$

Schließlich bleibt noch der Fall $r = 0$ übrig. Je nachdem $r_1 > 0$ oder $r_1 < 0$, verfährt man ebenso wie bei $r > 0$ oder $r < 0$ usw. Ist

$r = r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$, so wird man zu $x^\sigma \left| \int_{\frac{\sigma}{x^{m+1} + \sigma}}^x \frac{du}{u^{m+1} + \sigma} \right|$ geführt, und dieser Ausdruck ist bereits oben in der Form $O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$ abgeschätzt worden.

Da also stets unser Integralausdruck $|J| = M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$ gesetzt werden kann, so ergeben sich wieder die Ungleichungen

$$M_0^{(b)} \leq 1 + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}},$$

$$M_s^{(b)} \leq |a_1|^s + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}}$$

und aus ihnen die Beschränktheit von $M^{(b)}$. Nun folgert man ganz wie im vorigen Paragraphen die Existenz der Grenzfunktion $\lim_{b \rightarrow +\infty} y_1^{(b)} = y_1$, für diese die Gleichung

$$y_1 = z_1 + e^{r_1} x^{v_1} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$

und allgemein für $i = 1, 2, \dots, n$ die gewünschte asymptotische Darstellung

$$(26) \quad \begin{cases} y_i = e^{r_i(x)} x^{v_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \right) \\ \text{oder} \\ y_i = z_i + e^{r_i(x)} x^{v_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \end{cases}$$

und

$$(27) \quad y_i^{(s)} = z_i^{(s)} + e^{r_i(x)} x^{v_i + sk} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1).$$

§ 5.

Mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Formale Lösungen.

Die charakteristische Gleichung der gegebenen Differentialgleichung vom Range $k+1$ möge jetzt mehrfache Wurzeln besitzen. Dann kann man nach Fabry¹⁴⁾ stets eine Transformation der unabhängigen Variablen

$$x = t^p$$

mit positivem ganzzahligen p angeben, sodaß die transformierte Gleichung n formale Lösungen der Form

¹⁴⁾ l. c. S. 85.

$$(28) \quad e^{\gamma(t)} t^{\alpha} (\varphi_q + \varphi_{q-1} \log t + \dots + \varphi_1 \log^{q-1} t)$$

zuläßt, wobei $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ divergente Potenzreihen von $\frac{1}{t}$ sind. Drückt man hierin wieder t durch x aus, so erhält man Entwicklungen nach Potenzen von $x^{-\frac{1}{p}}$. Solche nach gebrochenen negativen Potenzen von x fortschreitende Reihen werden von Poincaré „anormale Reihen“ genannt im Gegensatz zu den Thoméschen Normalreihen. Wir wollen aber nach Ausführung der obigen Transformation für die neue Variable t die alte Bezeichnung x einführen und können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die zu untersuchende Gleichung n Entwicklungen der obigen Form in x , d. h. n „logarithmische Normalreihen“ und keine anormalen Reihen mehr zuläßt. Wir gehen jetzt auf die formalen Operationen im Anschluß an Fabry etwas ausführlicher ein.

Über die Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms $\gamma_i(x)$, dem man die Gestalt (s. § 4)

$$\gamma_i(x) = \frac{\alpha_i}{k+1} x^{k+1} + \frac{\alpha_{i1}}{k} x^k + \dots + \alpha_{ik} x$$

geben kann, ist folgendes zu sagen. Zunächst ist α_i eine Wurzel der Gleichung n -ten Grades $f(\alpha) = 0$; ihre Vielfachheitszahl sei λ . Dann erhält man für α_{i1} eine Gleichung vom Grade λ , die u. a. die λ_1 -fache Wurzel α_{i1} besitzen möge. Mit dieser weiter operierend, findet man für α_{i2} eine Gleichung vom Grade λ_1 mit der λ_2 -fachen Wurzel α_{i2} usw. Ist α_{ik} eine λ_k -fache Wurzel ihrer Bestimmungsgleichung, so ergibt sich für ϱ_i eine Gleichung vom Grade λ_k . Nun müssen mehrere Fälle unterschieden werden.

Zu einer einfachen Wurzel ϱ_i , die sich von keiner anderen um eine ganze Zahl unterscheidet, gehört ein Integral

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\varrho_i} \varphi_i \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$\varphi_i \left(\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{C_{i1}}{x} + \frac{C_{i2}}{x^2} + \dots$$

Zu einer r -fachen Wurzel, die sich von keiner anderen um eine ganze Zahl unterscheidet, gehören r Integrale der Form

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\varrho_i} \varphi_{i1}$$

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\varrho_i} (\varphi_{i2} + \varphi_{i1} \log x)$$

$$\vdots$$

$$e^{\gamma_i(x)} x^{\varrho_i} \left(\varphi_{ir} + \binom{r-1}{1} \varphi_{i,r-1} \log x + \binom{r-1}{2} \varphi_{i,r-2} \log^2 x + \dots + \varphi_{i1} \log^{r-1} x \right),$$

wobei das konstante Glied in der Entwicklung von φ_{i1} gleich 1 ist. Zu r einfachen Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$, die ganzzahlige Differenzen bilden und so geordnet sind, daß $R(\varrho_1) > R(\varrho_2) > \dots > R(\varrho_r)$ ist, gehören folgende r Integrale (der Index i ist zur Abkürzung weggelassen):

$$\begin{aligned} & e^{\gamma(x)} x^{\varrho_1} \varphi_1 \\ & e^{\gamma(x)} (x^{\varrho_2} \varphi_2 + x^{\varrho_1} \varphi_{21} \log x) \\ & e^{\gamma(x)} (x^{\varrho_3} \varphi_3 + x^{\varrho_2} \varphi_{31} \log x + x^{\varrho_1} \varphi_{32} \log^2 x) \\ & \vdots \\ & e^{\gamma(x)} (x^{\varrho_r} \varphi_r + x^{\varrho_{r-1}} \varphi_{r1} \log x + x^{\varrho_{r-2}} \varphi_{r2} \log^2 x + \dots + x^{\varrho_1} \varphi_{r, r-1} \log^{r-1} x). \end{aligned}$$

Hierbei beginnen die Entwicklungen von $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ mit dem konstanten Gliede 1; ferner lassen sich die Funktionen φ_{21} aus φ_1 und φ_2 , $\varphi_{31}, \varphi_{32}$ aus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{r1}, \dots, \varphi_{r, r-1}$ aus $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen. Im Gegensatz zum Falle mehrfacher Wurzeln ist hier also ein Verschwinden der mit Logarithmen behafteten Glieder möglich.

Hat endlich die Gleichung für ϱ mehrfache Wurzeln, die ganzzahlige Differenzen miteinander bilden, so erhält man noch andere Entwicklungen, die durch Kombination der beiden vorigen Fälle entstehen.

Wir werden nun den Beweis für den asymptotischen Charakter der Reihen φ zunächst an dem Beispiel einer Gleichung n -ter Ordnung vom Range 1, deren charakteristische Gleichung eine Doppelwurzel und $n-2$ einfache Wurzeln besitzt, genauer durchführen und dann den Beweis für den allgemeinen Fall kurz skizzieren.

§ 6.

Asymptotische Darstellung. Spezielles Beispiel.

Sei also vorläufig wieder $P_i(x) =$ oder $\sim a_i + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{ir}}{x^r}$. Die Gleichung $f(\alpha) = 0$ habe die einfachen Wurzeln α_j ($j = 1, 2, \dots, n-2$) und die Doppelwurzel $\alpha_{n-1} = \alpha_n$.

Zu den einfachen Wurzeln gehören Entwicklungen der Form

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_j x} x^{\varrho_j} \varphi_j, \\ & \varphi_j = 1 + \frac{C_{j1}}{x} + \frac{C_{j2}}{x^2} + \dots \end{aligned}$$

Zur Doppelwurzel α_{n-1} mögen 2 Normalreihen (keine anormalen Reihen s. o.) gehören. Die Zahl ϱ_{n-1} ist Wurzel einer Gleichung 2. Grades. Es wird vorausgesetzt, daß auch diese Gleichung eine Doppelwurzel $\varrho_{n-1} = \varrho_n$ besitzt. Dann ergeben sich die Entwicklungen

$$e^{a_{n-1}x} x^{a_{n-1}} \varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n-1} = 1 + \frac{C_{n-1,1}}{x} + \frac{C_{n-1,2}}{x^2} + \dots$$

$$e^{a_{n-1}x} x^{a_{n-1}} (\varphi_n + \varphi_{n-1} \log x), \quad \varphi_n = C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \frac{C_{n2}}{x^2} + \dots$$

Das konstante Glied C_{n0} in der Entwicklung von φ_n kann ebenso wie die in $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ auftretenden, gleich 1 gesetzten Konstanten willkürlich gewählt werden. Man kann C_{n0} aber im Gegensatz zu jenen Konstanten den Wert 0 beilegen, ohne daß die folgenden Koeffizienten C_{n1}, C_{n2}, \dots zu verschwinden brauchen, da diese nicht wie C_{i1}, C_{i2}, \dots ($i = 1, 2, \dots, n-1$) durch homogene, sondern durch unhomogene Gleichungen bestimmt werden. Daher wollen wir das Zeichen C_{n0} beibehalten und nicht den speziellen Wert 1 wählen.

Wir definieren jetzt die Abschnittsfunktionen durch die Gleichungen

$$(29) \quad \begin{aligned} z_i &= e^{a_i x} x^{a_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ z_n &= v_n + z_{n-1} \log x, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$v_n = e^{a_{n-1}x} x^{a_{n-1}} \left(C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \dots + \frac{C_{nm}}{x^m}\right)$$

gesetzt ist.

Die Relation

$$(30) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$

ergibt sich ganz ähnlich wie früher. Durch die a_i sind wieder die a_i bestimmt, durch die a_i und die q_i auch die a_{i1} usw., durch die $a_i, q_i, C_{i1}, \dots, C_{im}$ auch die $a_{i, m+1}$. Und zwar erhält man für die Systeme von je n Unbekannten $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i, m+1}$ [$i = 1, 2, \dots, n$] Systeme von je n linearen Gleichungen mit der Koeffizientendeterminante

$$(31) \quad A = \begin{vmatrix} 1, a_1, \dots & a_1^{n-2}, & a_1^{n-1} \\ \vdots & & \\ 1, a_{n-1}, \dots & a_{n-1}^{n-2}, & a_{n-1}^{n-1} \\ 0, 1, \dots (n-2) a_{n-1}^{n-3}, & (n-1) a_{n-1}^{n-2}, \end{vmatrix},$$

die hier dieselbe Rolle spielt, wie die in § 1 mit demselben Buchstaben bezeichnete. Es ergibt sich leicht

$$(32) \quad \begin{aligned} (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} A &= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_{n-2})(a_1 - a_{n-1})^2 \\ &\quad (a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_{n-2})(a_2 - a_{n-1})^2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad (a_{n-2} - a_{n-1})(a_{n-2} - a_{n-1})^2, \\ &\quad (a_{n-1} - a_{n-1})^2, \end{aligned}$$

mithin

$$A \neq 0,$$

so daß die a_{i1}, a_{i2}, \dots eindeutig bestimmt sind.

Nun muß der Determinantenquotient $\frac{A_i}{A}$ abgeschätzt werden. Wir verzichten auf Durchführung der Rechnung und geben nur das Resultat an. Bedeuten die A_i wieder die zur letzten Spalte von A gehörigen Unterdeterminanten, so ist

$$A = e^{\sum_{i=1}^n a_i} \cdot x^{\sum_{i=1}^n e_i} \cdot \frac{1}{x} \left(A + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$A_j = e^{\sum_{i=1}^n a_i - a_j} \cdot x^{\sum_{i=1}^n e_i - e_j} \cdot \frac{1}{x} \left(A_j + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n-2)$$

$$A_n = e^{\sum_{i=1}^n a_i - a_{n-1}} \cdot x^{\sum_{i=1}^n e_i - e_{n-1}} \left(A_n + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$A_{n-1} = -A_n \log x - e^{\sum_{i=1}^n a_i - a_{n-1}} \cdot x^{\sum_{i=1}^n e_i - e_{n-1}} \left(C_{n0} A_n + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

oder

$$A_{n-1} = -e^{\sum_{i=1}^n a_i - a_{n-1}} \cdot x^{\sum_{i=1}^n e_i - e_{n-1}} \left\{ \left(A_n + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \log x + C_{n0} A_n + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{A_j}{A} = e^{-a_j} x^{-e_j} \left(\frac{A_j}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) & (j = 1, 2, \dots, n-2) \\ \frac{A_n}{A} = e^{-a_{n-1}} x^{-e_{n-1}+1} \left(\frac{A_n}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ \frac{A_{n-1}}{A} = -\frac{A_n}{A} \log x - e^{-a_{n-1}} x^{-e_{n-1}+1} \left(\frac{C_{n0} A_n}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ \text{oder} \\ \frac{A_{n-1}}{A} = -e^{-a_{n-1}} x^{-e_{n-1}+1} \left\{ \left(\frac{A_n}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \log x + \frac{C_{n0} A_n}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}. \end{cases}$$

Anders wie bei dem von der einfachen Wurzel α_j herrührenden Quotienten $\frac{A_j}{A}$ tritt bei $\frac{A_n}{A}$ und $\frac{A_{n-1}}{A}$ im Exponenten von x zu der Größe $-e$ noch $+1$ hinzu, außerdem erscheint bei $\frac{A_{n-1}}{A}$ noch die Funktion $\log x$. Diese geringfügigen Modifikationen bewirken aber für die folgenden Abschätzungen nur unwesentliche Änderungen im Vergleich mit dem Falle einfacher Wurzeln.

Wir leiten nun, indem wir die alten Bezeichnungen (s. §§ 2, 3) konsequent beibehalten, die asymptotische Darstellung zuerst für ein Integral

ab, bei dem keine Logarithmen auftreten, z. B. für y_1 und dann für y_n . Es ist $y_1^{(b)}$ die einzige Lösung der Gleichung

$$y_1^{(b)} = z_1 + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\theta_i}^x \frac{d_i}{d} F(y_1^{(b)}) du$$

oder

$$\begin{aligned} y_1^{(b)} = & z_1 + \sum_{j=1}^{n-2} z_j \int_{\theta_j}^x e^{-\alpha_j u} u^{-c_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) F(y_1^{(b)}) du \\ & - z_{n-1} \int_{\theta_{n-1}}^x e^{-\alpha_{n-1} u} u^{-c_{n-1}+1} \left\{ \left(\frac{\Lambda_n}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) \log u + \frac{C_{n0} \Lambda_n}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} F(y_1^{(b)}) du \\ & + (z_{n-1} \log x + v_n) \int_{\theta_n}^x e^{-\alpha_{n-1} u} u^{-c_{n-1}+1} \left(\frac{\Lambda_n}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{u}\right) \right) F(y_1^{(b)}) du. \end{aligned}$$

Die ersten $n-2$ mit Integralen behafteten Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Gleichung führen ganz wie früher zu

$$M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Bei dem vorletzten ist zu bedenken, daß im Integranden $u \log u$ hinzukommt, wofür man auch $O(u^{1+\eta})$ mit festem, positiven, beliebig kleinen η schreiben kann. Daher liefert dieser den Beitrag

$$M^{(b)} O\left(\frac{x^{1+\eta}}{x^{m+1}}\right) = M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right).$$

Bei dem letzten tritt $\log x$ vor und u unter dem Integralzeichen hinzu. Mithin ergibt sich hier

$$M^{(b)} O\left(\frac{x \log x}{x^{m+1}}\right) = M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right).$$

Die Summe aller n Ausdrücke wird also in der Form

$$M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right)$$

abgeschätzt. (Durch eine Verfeinerung des Verfahrens könnte man $M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^m}\right)$ erreichen, worauf es aber nicht ankommt.) Für $M^{(b)}$ findet man nun unmittelbar die Ungleichung

$$M^{(b)} \leq \mu + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m-\eta}},$$

woraus wieder die Beschränktheit dieser Größe folgt. Jetzt erhält man

leicht die Existenz der Grenzfunktion $\lim_{b \rightarrow +\infty} y_1^{(b)} = y_1$ und für diese die Darstellung

$$y_1 e^{-a_1 x} x^{-c_1} = 1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1, m-1}}{x^{m-1}} + \frac{C_{1m}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right)$$

nebst entsprechenden Formeln für die Ableitungen.

Analoge Darstellungen gelten für y_2, \dots, y_{n-2} und auch für y_{n-1} . Es ist daher z. B. für $y_{n-1}^{(b)}$, wenn man noch nicht mit b zur Grenze übergegangen ist,

$$y_{n-1}^{(b)} e^{-a_{n-1} x} x^{-c_{n-1}} = 1 + \frac{C_{n-1,1}}{x} + \dots + \frac{C_{n-1,m}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right),$$

mithin

$$y_{n-1}^{(b)} = z_{n-1} + e^{a_{n-1} x} x^{c_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right),$$

was wir bald benutzen werden.

Wir kommen nun zu der Funktion $y_n^{(b)}$, der einzigen Lösung der Gleichung

$$(34) \begin{cases} y_n^{(b)} = z_n + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\eta_i}^x \frac{A_i}{A} F(y_n^{(b)}) du & \text{oder} \\ y_n^{(b)} = z_{n-1} \log x + e^{a_{n-1} x} x^{c_{n-1}} \left(C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \dots + \frac{C_{n,m}}{x^m} \right) + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\eta_i}^x \frac{A_i}{A} F(y_n^{(b)}) du \end{cases}$$

und wollen zeigen, daß

$$(35) (y_n^{(b)} - y_{n-1}^{(b)} \log x) e^{-a_{n-1} x} x^{-c_{n-1}} = C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \dots + \frac{C_{n,m-1}}{x^{m-1}} + O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right)$$

gesetzt werden kann, wobei η_1 wieder eine positive, beliebig kleine Konstante bedeutet.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$(36) y_n^{(b)} - y_{n-1}^{(b)} \log x = h^{(b)}(x).$$

Ähnlich wie früher sei nun hier

$$\text{Max} |h^{(b)}(x) e^{-a_{n-1} x} x^{-c_{n-1}}| = M_0^{(b)}, \quad \text{Max} |(h^{(b)}(x))^{(i)} e^{-a_{n-1} x} x^{-c_{n-1}}| = M_i^{(b)},$$

sowie

$$\text{Max} (M_0^{(b)}, M_1^{(b)}, \dots, M_{n-1}^{(b)}) = M^{(b)}.$$

Aus der Funktionalgleichung für $y_n^{(b)}$ folgt

$$h^{(b)}(x) = y_n^{(b)} - y_{n-1}^{(b)} \log x = (z_{n-1} - y_{n-1}^{(b)}) \log x + v_n + \sum_{i=1}^n z_i \int_{\eta_i}^x \frac{A_i}{A} F(y_n^{(b)}) du.$$

Nun ist aber, wie eben bewiesen wurde,

$$z_{n-1} - y_{n-1}^{(b)} = e^{a_{n-1} x} x^{c_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right),$$

mithin

$$(z_{n-1} - y_{n-1}^{(b)}) \log x = e^{a_{n-1}x} x^{e_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right),$$

wo η_1 nur der Ungleichung $\eta_1 > \eta$ zu genügen braucht. Daher

$$h^{(b)}(x) = v_n + e^{a_{n-1}x} x^{e_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right) + \sum_{i=1}^n z_i \int_{y_i}^x \frac{d_t}{A} F(y_n^{(b)}) du.$$

Hierbei ist

$$F(y_n^{(b)}) = \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s)(y_n^{(b)})^{(n-s)}.$$

Ferner war

$$F(y_{n-1}^{(b)}) = \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s)(y_{n-1}^{(b)})^{(n-s)} = e^{a_{n-1}x} x^{e_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right).$$

Setzt man

$$G^{(b)} = \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s)(h^{(b)})^{(n-s)},$$

so wird, da

$$(h^{(b)})^{(n-s)} = (y_n^{(b)})^{(n-s)} - (y_{n-1}^{(b)})^{(n-s)} \log x - \binom{n-s}{1} (y_{n-1}^{(b)})^{(n-s-1)} \cdot \frac{1}{x} + \dots$$

ist,

$$\begin{aligned} F(y_n^{(b)}) - F(y_{n-1}^{(b)}) \log x &= \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s) \left((h^{(b)})^{(n-s)} + \binom{n-s}{1} (y_{n-1}^{(b)})^{(n-s-1)} \cdot \frac{1}{x} - \dots \right) \\ &= G^{(b)} + \sum_{s=1}^n (Q_s - P_s) \left(\binom{n-s}{1} (y_{n-1}^{(b)})^{(n-s-1)} \cdot \frac{1}{x} - \dots \right) \\ &= G^{(b)} + e^{a_{n-1}x} x^{e_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m+3}}\right), \end{aligned}$$

folglich

$$|F(y_n^{(b)}) - F(y_{n-1}^{(b)}) \log x| e^{-a_{n-1}x} x^{-e_{n-1}} \leq G^{(b)} e^{-a_{n-1}x} x^{-e_{n-1}} + O\left(\frac{1}{x^{m+3}}\right).$$

Nun ist aber

$$|G^{(b)} e^{-a_{n-1}x} x^{-e_{n-1}}| = M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

und

$$|F(y_{n-1}^{(b)}) e^{-a_{n-1}x} x^{-e_{n-1}}| = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right),$$

daher

$$\begin{aligned} |F(y_n^{(b)}) e^{-a_{n-1}x} x^{-e_{n-1}}| &= O\left(\frac{\log x}{x^{m+2}}\right) + M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{m+3}}\right) \\ &= M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right) + O\left(\frac{\log x}{x^{m+2}}\right). \end{aligned}$$

Mithin kommt man bei den weiteren Abschätzungen zu Ausdrücken der Form

$$e^{rx} x^v \left| \int_{\eta}^x e^{-ru} u^{-s} \left(M^{(b)} O\left(\frac{1}{u^{m+s}}\right) + O\left(\frac{\log u}{u^{m+s}}\right) \right) du \right|,$$

sowie

$$\left| \int_{\eta}^x u \log u \left(M^{(b)} O\left(\frac{1}{u^{m+s}}\right) + O\left(\frac{\log u}{u^{m+s}}\right) \right) du \right|$$

und

$$\log x \left| \int_{\eta}^x u \left(M^{(b)} O\left(\frac{1}{u^{m+s}}\right) + O\left(\frac{\log u}{u^{m+s}}\right) \right) du \right|,$$

wenn zur Abkürzung der Index i weggelassen wird.

Am ungünstigsten sind die beiden letzten Ausdrücke. Sie liefern die Beiträge

$$M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m-\eta}}\right) + O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right).$$

In dieser Gestalt kann daher die Summe aller n mit Integralen behafteter Ausdrücke abgeschätzt werden. Daraus ergibt sich leicht die Beschränktheit von $M^{(b)}$ und schließlich die gewünschte Gleichung

$$(35^*) \quad h^{(b)}(x) e^{-a_{n-1}x} x^{-a_{n-1}} = C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \dots + \frac{C_{nm-1}}{x^{m-1}} + O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right).$$

Wie früher folgert man jetzt wieder die Existenz der Grenzfunktionen $\lim_{b \rightarrow +\infty} h^{(b)} = h$, sowie auch $\lim_{b \rightarrow +\infty} y_n^{(b)} = y_n$ und für die erstere aus (35^{*}) die asymptotische Darstellung. Wir erhalten also die Poincaréschen Limesgleichungen zunächst für alle Werte des Index bis $m-1$. Es läßt sich aber ähnlich wie im Falle einfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung zeigen, daß sie auch für alle größeren Werte des Index, z. B. auch für m gelten.

Demnach finden wir endgültig

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i = z_i + e^{a_i x} x^{v_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) = e^{a_i x} x^{v_i} \left(1 + \frac{C_{i1}}{x} + \dots + \frac{C_{im}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \right), \\ y_i^{(s)} = z_i^{(s)} + e^{a_i x} x^{v_i} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \\ \text{für} \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{und} \\ y_n = v_n + e^{a_{n-1}x} x^{v_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + y_{n-1} \log x \\ \quad = e^{a_{n-1}x} x^{v_{n-1}} \left(C_{n0} + \frac{C_{n1}}{x} + \dots + \frac{C_{nm}}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \right) + y_{n-1} \log x, \\ y_n^{(s)} = v_n^{(s)} + e^{a_{n-1}x} x^{v_{n-1}} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + (y_{n-1} \log x)^{(s)}. \end{array} \right.$$

Wie man sieht, kann die oben gewonnene Abschätzung $O\left(\frac{1}{x^{m-\eta_1}}\right)$ nachträglich durch $O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$ ersetzt werden.

§ 7.

Allgemeiner Fall.

Hat die charakteristische Gleichung der vorgelegten Differentialgleichung vom Range 1 Wurzeln beliebiger Vielfachheit, so bleibt die Relation

$$(38) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$

unverändert bestehen und wird wie früher bewiesen.

Ferner ist jetzt

$$\Delta = e^{\sum_{t=1}^n \alpha_t} \cdot x^{\sum_{t=1}^n \alpha_t} \cdot \frac{1}{x^q} \left(A + O\left(\frac{1}{x}\right) \right),$$

wobei die positive ganze Zahl $q < n$ ist und A eine nur von den α_i abhängige, nicht verschwindende Konstante bedeutet; außerdem hat man

$$\Delta_i = e^{x \left(\sum_{t=1}^n \alpha_t - \alpha_i \right)} \cdot x^{\sum_{t=1}^n \alpha_t - \alpha_i} \cdot \frac{\log^{\mu_i} x}{x^{q_i}} \left(A_i + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

wobei die positive ganze Zahl $q_i \geq q$, die positive ganze Zahl $\mu_i < n$ und A_i eine nur von den α abhängige Konstante ist. Durch Division der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$(39) \quad \frac{\Delta_i}{\Delta} = e^{-\alpha_i x} x^{-\alpha_i} x^{\lambda_i} \log^{\mu_i} x \left(\frac{A_i}{A} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right);$$

hierbei ist

$$0 \leq \lambda_i = q - q_i < n.$$

Die abzuschätzenden Ausdrücke können unter Weglassung des Index i auf

$$e^{rx} x^r \log^p x \left| \int_0^x \frac{e^{-ru} u^{-\sigma} u^{\lambda} \log^{\mu} u}{u^{m+2}} du \right|$$

reduziert werden, wenn p eine positive ganze Zahl $< n$ bedeutet.

Dieser Term führt aber zu

$$O\left(\frac{1}{x^{m+1-\lambda-\eta}}\right),$$

wofür man wegen $\lambda + \eta < n$ a fortiori

$$O\left(\frac{1}{x^{m+1-n}}\right)$$

schreiben kann. Hieraus ergibt sich die asymptotische Darstellung so wie immer.

Hat die vorgelegte Gleichung den Rang $k+1$, so ist stets

$$(40) \quad P_i - Q_i = O\left(\frac{x^{(i-1)k}}{x^{m+1}}\right)$$

und

$$(41) \quad \frac{A_i}{A} = O(1) e^{-\gamma_i(x)} x^{-(\sigma_i + (n-1)k)} x^{i_1} \log^{n_i} x,$$

woraus die gewünschten Folgerungen zu ziehen sind.

Es bleibt noch übrig, die Formeln für die asymptotische Darstellung explizite anzugeben.

Ist ϱ eine einfache Wurzel ihrer Bestimmungsgleichung, die sich von keiner anderen um eine ganze Zahl unterscheidet, so gehört zu diesem Werte ein Integral der Form

$$(42) \quad \begin{aligned} y &= z + e^{\gamma(x)} x^{\varrho} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ y^{(i)} &= z^{(i)} + e^{\gamma(x)} x^{\varrho+i k} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

Ist ϱ eine r -fache Wurzel, die sich von keiner anderen um eine ganze Zahl unterscheidet, so kann man zunächst im Anschluß an die formalen Entwicklungen (s. § 5) schreiben

$$\begin{aligned} y_1 &\sim e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \varphi_1 \\ y_2 &\sim e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \varphi_2 + y_1 \log x \\ &\vdots \\ y_r &\sim e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \varphi_r + \binom{r-1}{1} y_{r-1} \log x - \binom{r-1}{2} y_{r-2} \log^2 x + \dots + (-1)^r y_1 \log^{r-1} x. \end{aligned}$$

Führt man nun neben den Abschnittsfunktionen

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \left(1 + \frac{C_{11}}{x} + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}\right), \\ z_2 &= e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \left(C_{20} + \dots + \frac{C_{2m}}{x^m} + \left(1 + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}\right) \log x\right) \\ &\vdots \\ z_r &= e^{\gamma(x)} x^{\varrho} \left(C_{r0} + \dots + \frac{C_{rm}}{x^m} + \binom{r-1}{1} \left(C_{r-1,0} + \dots + \frac{C_{r-1,m}}{x^m}\right) \log x \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(1 + \dots + \frac{C_{1m}}{x^m}\right) \log^{r-1} x\right) \end{aligned}$$

noch die Teilfunktionen ein, aus denen sie zusammengesetzt sind,

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{\gamma(x)} x^{\rho} \left(C_{20} + \dots + \frac{C_{2m}}{x^m} \right) \\ &\vdots \\ v_r &= e^{\gamma(x)} x^{\rho} \left(C_{r0} + \dots + \frac{C_{rm}}{x^m} \right), \end{aligned}$$

so gewinnt man die endgültige Form der Darstellung

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= z_1 + e^{\gamma(x)} x^{\rho} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \\ y_1^{(s)} &= z_1^{(s)} + e^{\gamma(x)} x^{\rho+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \\ y_2 &= v_2 + e^{\gamma(x)} x^{\rho} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + y_1 \log x \\ y_2^{(s)} &= v_2^{(s)} + e^{\gamma(x)} x^{\rho+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) + (y_1 \log x)^{(s)} \\ &\vdots \\ y_r &= v_r + e^{\gamma(x)} x^{\rho} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \\ &\quad + \left[\binom{r-1}{1} y_{r-1} \log x - \binom{r-1}{2} y_{r-2} \log^2 x + \dots + (-1)^r y_1 \log^{r-1} x \right] \\ y_r^{(s)} &= v_r^{(s)} + e^{\gamma(x)} x^{\rho+s} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right) \\ &\quad + \left[\binom{r-1}{1} y_{r-1} \log x - \binom{r-1}{2} y_{r-2} \log^2 x + \dots + (-1)^r y_1 \log^{r-1} x \right]^{(s)}. \end{aligned} \right.$$

Ein näheres Eingehen auf den Fall ganzzahliger Differenzen zwischen den Wurzeln ρ unterlassen wir, da dieser Fall nur in rein formaler Hinsicht etwas Neues darbietet (s. § 5).

Das Gesamtergebnis unserer Untersuchungen ist, daß die formalen Entwicklungen ausnahmslos asymptotisch sind.

2. Kapitel.

Partielle Differentialgleichungen.

§ 1.

Allgemeines über Systeme simultaner partieller Differentialgleichungen.

Wir gehen jetzt zum Studium von Systemen simultaner partieller linearer Differentialgleichungen über, von denen ausdrücklich vorausgesetzt wird, daß sie nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen besitzen. Auf dieser Eigenschaft beruht letzten Endes die Analogie mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Als Beispiel wählen wir ein System von zwei Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.

Doch sind alle Methoden, die zur Anwendung gelangen, auf Systeme von mehr Gleichungen höherer Ordnung mit beliebig (endlich vielen) unabhängigen Variablen übertragbar.

Unser System ist

$$(1) \quad \begin{aligned} z_{xx} + P^{(1)} z_{xy} + P^{(2)} z_x + P^{(3)} z_y + P^{(4)} z &= 0, \\ z_{yy} + Q^{(1)} z_{xy} + Q^{(2)} z_x + Q^{(3)} z_y + Q^{(4)} z &= 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $P^{(i)}, Q^{(i)}$ seien analytische Funktionen von x und y , die sich an der Stelle $x = \xi, y = \eta$ regulär verhalten. Wir machen ferner die Annahme, daß

$$(2) \quad P^{(1)} Q^{(1)} - 1 \neq 0$$

ist, d. h. nicht identisch verschwindet. Dann hat (1) höchstens vier linear unabhängige Lösungen, die sich in (ξ, η) regulär verhalten. Schreibt man nämlich die Werte von z, z_x, z_y, z_{xy} an dieser Stelle willkürlich vor, so sind zunächst z_{xx} und z_{yy} bestimmt. Um die Ableitungen dritter Ordnung zu erhalten, differenziert man (1_1) nach y , (1_2) nach x und findet

$$\begin{aligned} z_{xxy} + P^{(1)} z_{xyy} + P_y^{(1)} z_{xy} + P^{(2)} z_{xy} + P_y^{(2)} z_x + P^{(3)} z_{yy} + P_y^{(3)} z_y + P^{(4)} z_y + P_y^{(4)} z &= 0, \\ z_{xyy} + Q^{(1)} z_{xxy} + Q_x^{(1)} z_{xy} + Q^{(2)} z_{xx} + Q_x^{(2)} z_x + Q^{(3)} z_{xy} + Q_x^{(3)} z + y Q^{(4)} z_x + Q_x^{(4)} z &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man nun, nachdem man z_{xx} und z_{yy} durch ihre Werte in z_{xy}, \dots, z ersetzt hat, nach z_{xxy} und z_{xyy} auflösen, da die Koeffizientendeterminante $P^{(1)} Q^{(1)} - 1$ ist, also nicht verschwindet. Differenziert man jetzt (1_1) nach x resp. (1_2) nach y , so gewinnt man z_{xxx} resp. z_{yyy} usw. Die Ableitungen beliebiger Ordnung sind also eindeutig bestimmt.

Die Maximalzahl 4 der Lösungen — im allgemeinen existieren natürlich überhaupt keine — wird erreicht, wenn die Koeffizienten $P^{(i)}, Q^{(i)}$ vier Relationen genügen, die ihrerseits wieder partielle Differentialgleichungen sind. Das unhomogene System

$$(3) \quad \begin{aligned} z_{xx} + P^{(1)} z_{xy} + P^{(2)} z_x + P^{(3)} z_y + P^{(4)} z + P^{(5)} &= 0 \\ z_{yy} + Q^{(1)} z_{xy} + Q^{(2)} z_x + Q^{(3)} z_y + Q^{(4)} z + Q^{(5)} &= 0 \end{aligned}$$

erreicht seine Höchstzahl von vier Lösungen, wenn die Koeffizienten fünf Bedingungen erfüllen. Man leitet sie folgendermaßen ab. Nachdem die Ableitungen dritter Ordnung durch z_{xy}, z_x, z_y, z und eine von z freie, bekannte Funktion dargestellt sind, findet man z_{xxy} entweder durch Differentiation von z_{xxy} nach y oder von z_{xyy} nach x .

Sei etwa auf diese Weise

$$\begin{aligned} \text{und} \quad z_{xxy} &= A^{(1)} z_{xy} + A^{(2)} z_x + A^{(3)} z_y + A^{(4)} z + A^{(5)} \\ z_{xyy} &= B^{(1)} z_{xy} + B^{(2)} z_x + B^{(3)} z_y + B^{(4)} z + B^{(5)}, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $A^{(i)}$ und $B^{(i)}$ nur von den $P^{(i)}$ und $Q^{(i)}$ abhängen. Die beiden Darstellungen von z_{xyy} müssen nun identisch sein; denn sonst hätte man eine Differentialgleichung der Form

$$(A^{(1)} - B^{(1)})z_{xy} + \dots + A^{(5)} - B^{(5)} = 0,$$

und das System (1) hätte höchstens drei Lösungen, da man nur noch die Werte von z , z_x , z_y willkürlich wählen könnte. Daher ist notwendig für die Existenz von vier Lösungen das Bestehen der fünf Relationen

$$A^{(i)} - B^{(i)} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5).$$

Diese sind aber auch hinreichend; denn, wenn sie gelten, sind, wie leicht ersichtlich, die verschiedenen Darstellungen, die man für die anderen Ableitungen vierter oder höherer Ordnung erhält, ebenfalls identisch.

Die „Integrationsbedingungen“ lauten in dem von Wilczynski behandelten Spezialfall, wo $P^{(1)} \equiv 0$ und $Q^{(1)} \equiv 0$ ist,

$$P_y^{(2)} - Q_z^{(2)} = 0,$$

$$Q_{xx}^{(2)} + 2Q_z^{(4)} - Q^{(2)}P_z^{(2)} - P^{(2)}Q_z^{(2)} - (P_{yy}^{(2)} + Q^{(3)}P_y^{(2)} - P^{(3)}Q_y^{(2)} - 2Q^{(2)}P_y^{(3)}) = 0,$$

$$Q_{xx}^{(3)} + P^{(2)}Q_z^{(3)} - Q^{(2)}P_z^{(3)} - 2P^{(3)}Q_z^{(2)} - (P_{yy}^{(3)} + 2P_y^{(4)} - P^{(3)}Q_y^{(3)} - Q^{(3)}P_y^{(3)}) = 0,$$

$$Q_{xx}^{(4)} - 2P^{(4)}Q_z^{(2)} - Q^{(2)}P_z^{(4)} + P^{(2)}Q_z^{(4)} - (P_{yy}^{(4)} - 2Q^{(4)}P_y^{(3)} - P^{(3)}Q_y^{(4)} + Q^{(3)}P_y^{(4)}) = 0,$$

$$Q_{xx}^{(5)} + P^{(2)}Q_z^{(5)} - Q^{(2)}P_z^{(5)} - 2Q_z^{(2)}P^{(5)} - Q^{(4)}P^{(5)} - (P_{yy}^{(5)} + Q^{(3)}P_y^{(5)} - P^{(3)}Q_y^{(5)} - 2P_y^{(3)}Q^{(5)} - P^{(4)}Q^{(5)}) = 0.$$

Im allgemeinen Fall sind sie außerordentlich kompliziert; wir wollen sie daher nicht erst hinschreiben.

Die fünf Bedingungen reduzieren sich für das homogene System, bei dem $P^{(5)} \equiv 0$ und $Q^{(5)} \equiv 0$ ist, auf die ersten vier, während die letzte eo ipso erfüllt ist. Wir bleiben nun beim homogenen System und nehmen an, daß die vier Bedingungen tatsächlich gelten, so daß vier Lösungen existieren.

Nebenbei wollen wir noch ohne Beweis bemerken, daß in dem durch (2) ausgeschlossenen Falle $P^{(1)}Q^{(1)} - 1 \equiv 0$ entweder höchstens drei Lösungen vorhanden sind oder aber unendlich viele. Jedenfalls existieren in diesem Ausnahmefalle niemals genau vier Lösungen.

§ 2.

Formale Lösungen.

Über das Verhalten der Koeffizienten von (1) in der Umgebung der Stelle $x = \infty$, $y = \infty$ machen wir jetzt die Annahme, daß sie in der Form

$$(4) \quad P^{(i)} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}^i}{x^{\mu} y^{\nu}}, \quad Q^{(i)} = \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu\nu}^i}{x^{\mu} y^{\nu}}$$

oder, was auch genügt,

$$(4*) \quad P^{(i)} \sim \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{a_{\mu\nu}^i}{x^{\mu} y^{\nu}}, \quad Q^{(i)} \sim \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{b_{\mu\nu}^i}{x^{\mu} y^{\nu}}$$

darstellbar sind, wo die Reihen rechts etwa für $|x| \geq a$, $|y| \geq a$ konvergieren resp. selbst asymptotischen Charakter haben.

Zur Abkürzung setzen wir

$$a_{00}^i = a_i, \quad b_{00}^i = b_i.$$

Das charakteristische Gleichungssystem

$$(5) \quad \begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \alpha^2 + a_1 \alpha \beta + a_2 \alpha + a_3 \beta + a_4 = 0 \\ g(\alpha, \beta) &= \beta^2 + b_1 \alpha \beta + b_2 \alpha + b_3 \beta + b_4 = 0 \end{aligned}$$

möge vier Lösungspaare besitzen. Da durch Elimination von β eine Gleichung vierten Grades für α entsteht, in der α^4 den Koeffizienten $a_1 b_1 - 1$ enthält, so ist notwendig und hinreichend für die Existenz von vier Wurzelpaaren das Bestehen der Ungleichung

$$(6) \quad a_1 b_1 - 1 \neq 0.$$

Sie ist lediglich eine Verschärfung der Bedingung (2), da $a_1 b_1 - 1$ das konstante Glied in der Entwicklung von $P^{(1)} Q^{(1)} - 1$ nach negativen Potenzen von x und y ist.

Wir machen ferner vorläufig die Annahme, daß (5) nur einfache Lösungspaare $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_4, \beta_4)$ besitzt. Dann existieren vier dem System (1) formal genügende Entwicklungen

$$(7) \quad \begin{aligned} &e^{\alpha_i x + \beta_i y} x^{\sigma_i} y^{\tau_i} \varphi_i, \\ &\varphi_i = C_{00}^i + \frac{C_{10}^i}{x} + \frac{C_{01}^i}{y} + \dots, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei die Reihen φ_i im allgemeinen für jede Wertverbindung (x, y) divergieren. Wie die Rechnung zeigt (s. u.), bleibt C_{00}^i willkürlich und wird im folgenden gleich der Einheit angenommen. Trägt man die Entwicklungen (7) in (1) ein, so erhält man die Gleichungen zur Bestimmung von $\alpha_i, \beta_i, \sigma_i, \tau_i, C_{10}^i, C_{01}^i, \dots$. Durch Nullsetzen der konstanten Glieder ergeben sich die Gleichungen (5) $f(\alpha, \beta) = 0$, $g(\alpha, \beta) = 0$, welche α_i

und β_i liefern. Weiter findet man unter Weglassung des Index i durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$

$$(8) \quad \begin{aligned} \varrho(2\alpha + a_1\beta + a_2) + a_{10}^1\alpha\beta + a_{10}^2\alpha + a_{10}^3\beta + a_{10}^4 &= 0, \\ \varrho(b_1\beta + b_2) + b_{10}^1\alpha\beta + b_{10}^2\alpha + b_{10}^3\beta + b_{10}^4 &= 0, \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma(a_1\alpha + a_2) + a_{01}^1\alpha\beta + a_{01}^2\alpha + a_{01}^3\beta + a_{01}^4 &= 0, \\ \sigma(2\beta + b_1\alpha + b_2) + b_{01}^1\alpha\beta + b_{01}^2\alpha + b_{01}^3\beta + b_{01}^4 &= 0. \end{aligned}$$

Durch (8) ist ϱ , durch (9) σ eindeutig bestimmt. Denn was z. B. α betrifft, so läßt sich zunächst zeigen, daß die beiden Gleichungen (9) miteinander verträglich sind. Dies beruht darauf, daß die Funktionen $P^{(6)}$ und $Q^{(6)}$ nicht ganz beliebig gewählt werden dürfen. Vielmehr ergibt sich aus den Integrabilitätsbedingungen und den Gleichungen (4) folgendes. Durch die a_i , a_{10}^i , a_{01}^i und b_i sind die b_{10}^i und b_{01}^i eindeutig bestimmt. Nimmt man die a_{20}^i und a_{02}^i hinzu, so sind die a_{11}^i , b_{20}^i , b_{11}^i , b_{02}^i eindeutig bestimmt usw. Genügt also σ der Gleichung (9₁), dann eo ipso auch (9₂). Ferner können die in diesen beiden Gleichungen auftretenden Koeffizienten von σ nicht gleichzeitig verschwinden. Denn es sei etwa $a_1\alpha + a_2 = 0$ für $\alpha = \alpha_1$. Dann folgt aus (5₁), daß auch $\alpha^2 + a_2\alpha + a_1 = 0$ wird. Nun entsteht durch Elimination von β aus (5) die Gleichung

$$F(\alpha) = (\alpha^2 + a_2\alpha + a_1)^2 - (a_1\alpha + a_2)(b_1\alpha + b_2)(\alpha^2 + a_2\alpha + a_1) + (b_2\alpha + b_1)(a_1\alpha + a_2)^2 = 0.$$

Offenbar wird $F'(\alpha_1) = 0$, so daß α_1 mehrfache Wurzel von $F(\alpha) = 0$ ist; sei etwa $\alpha_2 = \alpha_1$. Wäre nun für $\alpha = \alpha_1$ auch der Koeffizient von σ in (9₁), d. h. $2\beta + b_1\alpha + b_2 = 0$ oder $\beta = -\frac{b_1\alpha + b_2}{2}$, so hätte (5₂), da sich aus ihr $\beta = -\frac{b_1\alpha + b_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_1\alpha + b_2)^2}{4} - b_2\alpha - b_1}$ ergibt, die Doppelwurzel $\beta_1 = \beta_2$. Mithin wäre α_1, β_1 ein mehrfaches Paar gegen die Voraussetzung. Ebenso wird der Beweis für ϱ geführt. Durch Nullsetzen der Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}$ in (1₁) findet man

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &C_{00}(\varrho^2 + a_{10}^1\beta\varrho + a_{10}^2\varrho + a_{20}^1\alpha\beta + a_{20}^2\alpha + a_{20}^3\beta + a_{20}^4) \\ &+ C_{10}(2\alpha(\varrho - 1) + a_1\beta(\varrho - 1) + a_2\varrho + a_{10}^1\alpha\beta + a_{10}^2\alpha + a_{10}^3\beta + a_{10}^4) = 0 \\ &C_{00}(a_{01}^1\alpha\sigma + a_{01}^2\sigma + a_{02}^1\alpha\beta + a_{02}^2\alpha + a_{02}^3\beta + a_{02}^4) \\ &+ C_{01}(a_1\alpha(\sigma - 1) + a_2(\sigma - 1) + a_{01}^1\alpha\beta + a_{01}^2\alpha + a_{01}^3\beta + a_{01}^4) = 0 \\ &C_{00}(a_{11}^1\varrho\sigma + a_{11}^2\alpha\sigma + a_{11}^3\beta\varrho + a_{11}^4\varrho + a_{11}^5\sigma + a_{11}^6\alpha\beta + a_{11}^7\alpha + a_{11}^8\beta + a_{11}^9) \\ &+ C_{10}(a_1\alpha\sigma + a_2\sigma + a_{01}^1\alpha\beta + a_{01}^2\alpha + a_{01}^3\beta + a_{01}^4) \\ &+ C_{01}(2\alpha\varrho + a_1\beta\varrho + a_2\varrho + a_{10}^1\alpha\beta + a_{10}^2\alpha + a_{10}^3\beta + a_{10}^4) = 0, \end{aligned} \right.$$

sowie drei analoge Gleichungen, die aus (1₂) hervorgehen.

Ähnlich wie oben läßt sich beweisen, daß unter diesen sechs Gleichungen nur zwei voneinander unabhängig sind und daß aus diesen C_{10} und C_{01} bestimmt werden können, während C_{00} willkürlich bleibt.

Für C_{90} , C_{11} , C_{02} erhält man acht Gleichungen, unter denen drei unabhängig sind, usw.

Für das folgende ist es von großer Wichtigkeit, daß die Determinante

$$(11) \quad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \alpha_2 \beta_2, & \dots & & \\ \alpha_3 \beta_3, & \dots & & \\ \alpha_4 \beta_4, & \dots & & \end{vmatrix} + 0$$

ist. Aus ihrem Verschwinden würde nämlich, wie wir jetzt zeigen werden, die Existenz mehrfacher Lösungspaare von (5) folgen. (Die Umkehrung ist evident.) Setzt man mit einem variablen Parameter t

$$\alpha_i + t \beta_i = \vartheta_i(t),$$

so ist notwendig und hinreichend für das Vorhandensein mehrfacher Paare (α_i, β_i) das in t identische Verschwinden der Determinante

$$\theta(t) = \begin{vmatrix} \vartheta_1^3, & \vartheta_1^2, & \vartheta_1, & 1 \\ \vartheta_2^3, & \dots & & \\ \vartheta_3^3, & \dots & & \\ \vartheta_4^3, & \dots & & \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\vartheta_i^3 = \alpha_i^3 + 3\alpha_i^2\beta_i t + 3\alpha_i\beta_i^2 t^2 + \beta_i^3 t^3.$$

Man kann aber α^3 , $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$, β^3 mittels (5) durch $\alpha\beta$, α , β , 1 darstellen. Dann erhält man etwa

$$\vartheta_i^3 = u_1 \alpha_i \beta_i + u_2 \alpha_i + u_3 \beta_i + u_4.$$

Dabei sind u_1, \dots, u_4 ganze Funktionen von t und rationale Funktionen von α_1, \dots, β_4 , wo im Nenner lediglich die von 0 verschiedene Größe $\alpha_1 \beta_1 - 1$ auftritt. Ebenso sei

$$\vartheta_i^2 = v_1 \alpha_i \beta_i + v_2 \alpha_i + v_3 \beta_i + v_4.$$

Mithin wird

$$\theta = \begin{vmatrix} u_1 \alpha_1 \beta_1 + u_2 \alpha_1 + u_3 \beta_1 + u_4, & v_1 \alpha_1 \beta_1 + v_2 \alpha_1 + v_3 \beta_1 + v_4, & \alpha_1 + t \beta_1, & 1 \\ u_1 \alpha_2 \beta_2 + u_2 \alpha_2 + u_3 \beta_2 + u_4, & \dots & & \\ u_1 \alpha_3 \beta_3 + u_2 \alpha_3 + u_3 \beta_3 + u_4, & \dots & & \\ u_1 \alpha_4 \beta_4 + u_2 \alpha_4 + u_3 \beta_4 + u_4, & \dots & & \end{vmatrix}$$

oder

$$\theta = \begin{vmatrix} u_1, u_2, u_3, u_4 \\ v_1, v_2, v_3, v_4 \\ 0, 1, t, 0 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} \cdot \delta.$$

Aus $\delta = 0$ würde also $\theta(t) \equiv 0$ folgen, w. z. b. w.

§ 3.

Die Funktionalgleichung und zwei grundlegende Relationen.

Wir führen jetzt die Abschnittsfunktionen ein

$$(12) \quad w^{(i)} = E^{(i)} R^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, 4)$$

wobei

$$(13) \quad E^{(i)} = e^{\alpha_i x + \beta_i y} x^{\alpha_i} y^{\beta_i},$$

$$R^{(i)} = 1 + \frac{C_{10}^i}{x} + \frac{C_{01}^i}{y} + \dots + \frac{C_{m0}^i}{x^m} + \frac{C_{m-1,1}^i}{x^{m-1}y} + \dots + \frac{C_{0m}^i}{y^m}$$

gesetzt und m ein beliebiger Index ist.Man findet leicht unter Weglassung des Index i

$$w = ER = E\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$w_x = E\left(\left(\alpha + \frac{\alpha}{x}\right)R + R_x\right) = E\left(\alpha + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$w_y = E\left(\left(\beta + \frac{\beta}{y}\right)R + R_y\right) = E\left(\beta + O\left(\frac{1}{y}\right)\right),$$

$$w_{xy} = E\left(\left(\alpha + \frac{\alpha}{x}\right)\left(\beta + \frac{\beta}{y}\right)R + \left(\beta + \frac{\beta}{y}\right)R_x + \left(\alpha + \frac{\alpha}{x}\right)R_y + R_{xy}\right) = E\left(\alpha\beta + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

sowie auch

$$w_{xx} = E\left(\left(\alpha + \frac{\alpha}{x}\right)^2 R + 2\left(\alpha + \frac{\alpha}{x}\right)R_x - \frac{\alpha}{x^2}R + R_{xx}\right) = E\left(\alpha^2 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$w_{yy} = E\left(\left(\beta + \frac{\beta}{y}\right)^2 R + 2\left(\beta + \frac{\beta}{y}\right)R_y - \frac{\beta}{y^2}R + R_{yy}\right) = E\left(\beta^2 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right),$$

wobei die Gleichungen $\frac{y}{x} = O(1)$ und $\frac{x}{y} = O(1)$ berücksichtigt sind.

Setzt man

$$(14) \quad A = \begin{vmatrix} w_{xy}^{(1)}, w_x^{(1)}, w_y^{(1)}, w^{(1)} \\ w_{xy}^{(2)}, \dots \\ w_{xy}^{(3)}, \dots \\ w_{xy}^{(4)}, \dots \end{vmatrix},$$

so ist Δ das Analogon zu der im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen auftretenden Wronskischen Determinante.

Es ergibt sich weiter

$$\Delta = E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \alpha_1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \beta_1 + O\left(\frac{1}{x}\right), & 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ \alpha_2 \beta_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots & & \\ \alpha_3 \beta_3 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots & & \\ \alpha_4 \beta_4 + O\left(\frac{1}{x}\right), & \dots & & \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta = E^{(1)} E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} \left(\delta + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Da $\delta \neq 0$ ist, so erkennt man, daß Δ nicht identisch verschwinden kann, daß also $w^{(1)}, \dots, w^{(4)}$ linear unabhängig sind.

Mithin läßt sich das System

$$(15) \quad \begin{aligned} w_{xx} + H^{(1)} w_{xy} + H^{(2)} w_x + H^{(3)} w_y + H^{(4)} w &= 0 \\ w_{yy} + K^{(1)} w_{xy} + K^{(2)} w_x + K^{(3)} w_y + K^{(4)} w &= 0 \end{aligned}$$

aufstellen, welches die $w^{(i)}$ zu Lösungen hat. Die Koeffizienten $H^{(i)}, K^{(i)}$ sind Determinantenquotienten, und als Nenner erscheint stets Δ . Man sieht leicht ein, daß die Koeffizienten rationale Funktionen von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ sind, die sich in $x = \infty, y = \infty$ regulär verhalten. Sie können also nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ in konvergente Reihen entwickelt werden.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Entwicklungen der $P^{(i)}$ und $H^{(i)}$, sowie der $Q^{(i)}$ und $K^{(i)}$ in den Gliedern bis zur $(m+1)$ -ten Ordnung übereinstimmen. Aus der Art, wie die Größen α, β, \dots berechnet wurden, ergibt sich folgendes:

Durch die a_i und b_i sind die α_i und β_i eindeutig bestimmt,

$$\begin{aligned} & \text{,, } \text{,, } a_i, b_i, a_{i0}^i, a_{0i}^i, b_{i0}^i, b_{0i}^i \text{ auch die } \varrho_i \text{ und } \sigma_i, \\ & \text{,, } \text{,, } a_i, b_i, \dots, a_{i0}^i, a_{i1}^i, a_{0i}^i, \dots, b_{0i}^i \text{ auch die } C_{i0}^i \text{ und } C_{0i}^i, \\ & \vdots \\ & \text{,, } \text{,, } a_i, b_i, \dots, a_{i, m+1, 0}^i, \dots, b_{0, m+1}^i \text{ auch die } C_{i0, m}^i, \dots, C_{0, m}^i. \end{aligned}$$

Es gilt aber auch das Umgekehrte. Durch die α_i und β_i sind die a_i und b_i eindeutig bestimmt mittels zweier Systeme von je vier linearen Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante δ , also $\neq 0$ ist.

Durch Hinzunahme von ϱ_i und σ_i sind auch a_{i0}^i und a_{0i}^i , sowie b_{i0}^i und b_{0i}^i bestimmt, usw., durch Hinzunahme von $C_{i0}^i, \dots, C_{0i}^i$ auch $a_{i, m+1, 0}^i, \dots, b_{0, m+1}^i$ und zwar stets durch Systeme von je vier linearen

Gleichungen mit der Koeffizientendeterminante δ . Aus obigem ergibt sich unmittelbar

$$(16) \quad P^{(i)} - H^{(i)} = O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right), \quad Q^{(i)} - K^{(i)} = O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right)$$

sowie

$$(16^*) \quad \begin{aligned} P_z^{(i)} - H_z^{(i)} &= O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right), \quad Q_z^{(i)} - K_z^{(i)} = O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right) \\ P_y^{(i)} - H_y^{(i)} &= O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right), \quad Q_y^{(i)} - K_y^{(i)} = O\left(\frac{1}{x^{m+i}}\right). \end{aligned}$$

Um die Funktionalgleichung abzuleiten, schreiben wir jetzt (1) in der Form

$$(1^*) \quad \begin{aligned} z_{xx} + H^{(1)} z_{xy} + H^{(2)} z_x + H^{(3)} z_y + H^{(4)} z &= (H^{(1)} - P^{(1)}) z_{xy} + \dots + (H^{(4)} - P^{(4)}) z = F \\ z_{yy} + K^{(1)} z_{xy} + K^{(2)} z_x + K^{(3)} z_y + K^{(4)} z &= (K^{(1)} - Q^{(1)}) z_{xy} + \dots + (K^{(4)} - Q^{(4)}) z = G. \end{aligned}$$

Sieht man F und G für einen Augenblick als bekannte Funktionen an, so ist (1^*) ein unhomogenes System, dessen Integrale mittels der Variation der Konstanten durch die des zugehörigen homogenen Systems (15), d. h. durch die $w^{(i)}$, dargestellt werden können. Man findet

$$(17) \quad z = \sum_{i=1}^4 c_i w^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_{g_i, l_i}^{z, y} [M^{(i)} du + N^{(i)} dv],$$

sowie

$$\begin{aligned} z_x &= \sum_{i=1}^4 c_i w_x^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w_x^{(i)} \int_{g_i, l_i}^{z, y} [M^{(i)} du + N^{(i)} dv] \\ z_y &= \sum_{i=1}^4 c_i w_y^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w_y^{(i)} \int_{g_i, l_i}^{z, y} [M^{(i)} du + N^{(i)} dv] \\ z_{xy} &= \sum_{i=1}^4 c_i w_{xy}^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w_{xy}^{(i)} \int_{g_i, l_i}^{z, y} [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]. \end{aligned}$$

Dabei sind die c_i die willkürlichen Integrationskonstanten, die g_i und l_i beliebige, aber fest gewählte, nur durch die Ungleichungen $g_i \geq a$, $l_i \geq a$ beschränkte Konstante. Der Integrand ist stets ein exakter Differentialausdruck, sodaß das Integral vom Wege unabhängig ist. Ferner hat man, wenn auch die Differentiation nach u und v durch Indizes angedeutet wird,

$$(18) \quad \begin{aligned} M^{(i)} &= \frac{\Delta_u^{(i)}}{\Delta} FC + \frac{\Delta_v^{(i)}}{\Delta} FC + \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta} (F_v C + FC + G_u C + GC) \\ N^{(i)} &= \frac{\Delta_u^{(i)}}{\Delta} GC + \frac{\Delta_v^{(i)}}{\Delta} GC + \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta} (F_v C + FC + G_u C + GC). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\Delta^{(i)}$ die zu $w_{xy}^{(i)}$ gehörige Unterdeterminante von Δ . Endlich ist C das allgemeine Symbol für irgendeine Funktion, die nur von den Koeffizienten $H^{(i)}$ und $K^{(i)}$ der Differentialgleichung der Abschnitte abhängt und aus diesen durch die vier rationalen Operationen und das Differenzieren abgeleitet wird und zwar so, daß als Nenner lediglich eine Potenz von $H^{(1)}K^{(1)} - 1$ auftritt. Da neben $H^{(i)}$ und $K^{(i)}$ auch $\frac{1}{H^{(1)}K^{(1)} - 1}$ in $x = \infty, y = \infty$ regulär ist, so gilt dasselbe auch von C . Man kann daher

$$C = O(1)$$

setzen.

Substituiert man in $M^{(i)}$ und $N^{(i)}$ für F und G die aus (1*) sich ergebenden linearen Differentialausdrücke von z , so ist (17) eine Funktionalgleichung für z . Diese mit vier willkürlichen Parametern c_1, \dots, c_4 behaftete Integrodifferentialgleichung ist dem gegebenen von Parametern freien Systeme von zwei simultanen Differentialgleichungen äquivalent. Wir müssen jetzt noch die in (18) auftretenden Determinantenquotienten $\frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}, \frac{\Delta_u^{(i)}}{\Delta}, \frac{\Delta_v^{(i)}}{\Delta}$ abschätzen. Es ist z. B.

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} w_x^{(2)}, w_y^{(2)}, w^{(2)} \\ w_x^{(3)}, \dots \\ w_x^{(4)}, \dots \end{vmatrix} = E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} \begin{vmatrix} \alpha_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), \beta_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ \alpha_3 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \\ \alpha_4 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \end{vmatrix},$$

mithin

$$\Delta^{(1)} = E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} O(1) = \frac{\prod_{i=1}^4 E^{(i)}}{E^{(1)}} \cdot O(1)$$

und allgemein

$$\Delta^{(i)} = \frac{\prod_{i=1}^4 E^{(i)}}{E^{(i)}} \cdot O(1).$$

Ferner ist z. B.

$$\Delta_x^{(1)} = \begin{vmatrix} w_{xx}^{(2)}, w_y^{(2)}, w^{(2)} \\ w_{xx}^{(3)}, \dots \\ w_{xx}^{(4)}, \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_x^{(2)}, w_{xy}^{(2)}, w^{(2)} \\ w_x^{(3)}, \dots \\ w_x^{(4)}, \dots \end{vmatrix} \\ = E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2^2 + O\left(\frac{1}{x}\right), \beta_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ \alpha_3^2 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \\ \alpha_4^2 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), \alpha_2 \beta_2 + O\left(\frac{1}{x}\right), 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ \alpha_3 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \\ \alpha_4 + O\left(\frac{1}{x}\right), \dots \end{vmatrix} \right\}$$

oder

$$\Delta_x^{(1)} = E^{(2)} E^{(3)} E^{(4)} O(1)$$

und allgemein

$$\Delta_x^{(i)} = \frac{\prod_{t=1}^i E^{(t)}}{E^{(i)}} \cdot O(1), \quad \text{ sowie } \quad \Delta_y^{(i)} = \frac{\prod_{t=1}^i E^{(t)}}{E^{(i)}} \cdot O(1).$$

Aus den letzten Formeln in Verbindung mit der oben für Δ abgeleiteten folgt unmittelbar

$$(19) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_x^{(i)}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_y^{(i)}}{\Delta} \end{array} \right\} = \frac{O(1)}{E^{(i)}} = O(1) e^{-(\alpha_i x + \beta_i y)} x^{-\alpha_i} y^{-\alpha_i}.$$

Die Funktionalgleichung (17) bildet nebst (16) und (19) die Grundlage für die folgenden Abschätzungen.

§ 4.

Spezielle Integrodifferentialgleichung. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Aus dem oben definierten Sektor S schneiden wir jetzt ein endliches Teilgebiet heraus, indem wir durch einen Punkt B mit den Koordinaten $x = b$, $y = b$, die lediglich durch die Ungleichung $b > a$ beschränkt sind, Parallele zu den Achsen ziehen, welche G_1 und G_2 in C resp. in D schneiden. Das Viereck $ACBD$ bezeichnen wir mit $S^{(b)}$. Lassen wir dann b ins Unendliche wachsen, so geht es in S über. Der Punkt mit den variablen Koordinaten (x, y) werde P , der mit den festen Koordinaten (g_i, l_i) werde L_i genannt. Der letztere wird stets einer der vier Punkte A, B, C, D sein.

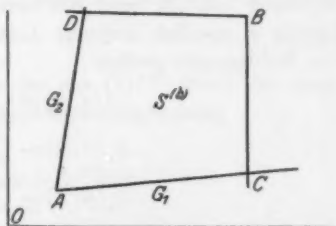


Fig. 2.

Die Gleichung (17) können wir in der Form

$$(17^{**}) \quad z = \sum_{i=1}^4 c_i w^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]$$

schreiben. Setzen wir, wenn k irgendeine der Zahlen $1, \dots, 4$ bedeutet,

$$c_k = 1; \quad c_i = 0, \quad i \leq k,$$

so erhalten wir die spezielle Integrodifferentialgleichung

$$(20) \quad z = w^{(k)} + \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]$$

und werden jetzt beweisen, daß diese eine und nur eine Lösung besitzt. Vorher müssen noch die Punkte L_i genau bestimmt werden. Setzt man zur Abkürzung

$$R(\alpha_i - \alpha_k) = \gamma_i, \quad R(\beta_i - \beta_k) = \delta_i$$

und auch gleich mit Rücksicht auf die späteren Untersuchungen

$$R(\varrho_i - \varrho_k) = r_i, \quad R(\sigma_i - \sigma_k) = s_i,$$

so sind folgende vier Fälle zu unterscheiden:

- (I.) $\gamma_i \geq 0, \delta_i \geq 0; L_i = B.$
- (II.) $\gamma_i \leq 0, \delta_i \leq 0$ mit Ausschluß von $\gamma_i = 0, \delta_i = 0; L_i = A.$
- (III.) $\gamma_i > 0, \delta_i < 0; L_i = C.$
- (IV.) $\gamma_i < 0, \delta_i > 0; L_i = D.$

Wir gehen nun aus von der Gleichung

$$(21) \quad z = \sum_{i=1}^4 C_i w^{(i)} + \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_A^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv],$$

in der als unterer Grenzpunkt aller Integrale stets A gewählt ist. Diese Gleichung hat für jede Wertverbindung C_1, \dots, C_4 eine und nur eine Lösung z , nämlich diejenige Lösung des gegebenen Systems (1), welche den Bedingungen genügt

$$\begin{aligned} z(a, a) &= \sum C_i w^{(i)}(a, a), \\ z_x(a, a) &= \sum C_i w_x^{(i)}(a, a), \\ z_y(a, a) &= \sum C_i w_y^{(i)}(a, a), \\ z_{xy}(a, a) &= \sum C_i w_{xy}^{(i)}(a, a). \end{aligned}$$

(Durch diese Bedingungen ist ja nach § 1 eine Lösung von (1) eindeutig festgelegt.) Setzt man insbesondere

$$C_j = 1, \quad C_i = 0, \quad i \leq j,$$

so erhält man ein partikuläres Integral $Z^{(j)}$, das den Bedingungen genügt

$$Z^{(j)}(a, a) = w^{(j)}(a, a), \dots, Z_{xy}^{(j)}(a, a) = w_{xy}^{(j)}(a, a).$$

Für die Lösung von (21) gilt alsdann

$$z = \sum_{j=1}^4 C_j Z^{(j)}.$$

Wir versuchen nun (21) mit (17**) zu identifizieren. Sollen (17**) und (21) identisch sein, so muß

$$c_i + \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv] = C_i + \int_A^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]$$

oder

($i = 1, \dots, 4$)

$$c_i = C_i + \int_A^{L_i} [M^{(i)}(z) du + N^{(i)}(z) dv]$$

sein. Ersetzt man in den Integralen z durch $\sum_{j=1}^4 C_j Z^{(j)}$, so erhält man

$$(22) \quad c_i = C_i + \sum_{j=1}^4 C_j \int_A^{L_i} [M^{(i)}(Z^{(j)}) du + N^{(i)}(Z^{(j)}) dv].$$

Hierin sind nun die Integrale $\int_A^{L_i} \dots$ von den C_j unabhängig. Daher stellt das System der vier Gleichungen (22) eine lineare Transformation zwischen den c_i und den C_i dar. In der obigen Form erscheint das System nach den c_i aufgelöst, und wir wollen zeigen, daß es auch nach den C_i eindeutig aufgelöst werden kann. Wir müssen also beweisen, daß die Koeffizientendeterminante der C_i von 0 verschieden ist. Wäre sie 0, so hätte das System (22) eine Lösung, wenn man es durch die Wahl

$$c_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

homogen machen würde. Dann müßte die aus (17**) durch die obige Wahl der c_i entstehende homogene Integrodifferentialgleichung

$$(23) \quad z = \sum_{i=1}^4 w^{(i)} \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]$$

eine Lösung besitzen. Da diese auch dem System (1) genügen müßte, würde sie ebenso wie die Koeffizienten von (1) für $|x| \geq a$, $|y| \geq a$ regulär sein. (Es gilt nämlich ebenso wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen der Satz, daß eine im Endlichen gelegene Stelle, in der sich sämtliche Koeffizienten regulär verhalten, auch Regularitätsstelle für alle Integrale ist.) Daher müßten jedenfalls z und seine Ableitungen beliebiger Ordnung in allen Punkten des Gebietes $S^{(b)}$, auf das wir P jetzt beschränken, stetige Funktionen von x und y sein. Wir haben also noch

zu zeigen, daß keine solche Lösung von (23) existieren kann. Sei z eine solche. Aus (23) folgt

$$(24) \quad \frac{z}{E^{(k)}} = \sum_{i=1}^4 e^{(\alpha_i - \beta_i)x + (\beta_i - \delta_i)y} x^{\alpha_i - \delta_i} y^{\beta_i - \delta_i} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv].$$

Die Funktion

$$\frac{1}{E^{(k)}} = e^{-(\alpha_k x + \beta_k y)} x^{-\delta_k} y^{-\delta_k}$$

ist in $S^{(b)}$ stetig, daher sind auch die Funktionen

$$\left| \frac{z}{E^{(k)}} \right|, \quad \left| \frac{z_x}{E^{(k)}} \right|, \quad \left| \frac{z_y}{E^{(k)}} \right|, \quad \left| \frac{z_{xy}}{E^{(k)}} \right|$$

stetig. Die letzteren besitzen also in $S^{(b)}$ Maxima. Wir setzen

$$\text{Max} \left| \frac{z}{E^{(k)}} \right| = M_0, \dots, \quad \text{Max} \left| \frac{z_{xy}}{E^{(k)}} \right| = M_s,$$

sowie

$$\text{Max}(M_0, \dots, M_s) = M.$$

Da jede Ableitung $\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$ bei beliebigem μ und ν in der Form

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = R z_{xy} + S z_x + T z_y + U z$$

dargestellt werden kann, wo R, \dots, U Funktionen von x und y sind, die sich in $x = \infty, y = \infty$ regulär verhalten, so ist

$$\left| \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \cdot \frac{1}{E^{(k)}} \right| = MO(1).$$

Mithin ergibt sich

$$(25) \quad \left| \frac{F}{E^{(k)}} \right| \leq \left| H^{(1)} - P^{(1)} \right| \cdot \left| \frac{z_{xy}}{E^{(k)}} \right| + \dots + \left| H^{(4)} - P^{(4)} \right| \cdot \left| \frac{z}{E^{(k)}} \right| = MO\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right),$$

ferner

$$(25^*) \quad \left| \frac{F_x}{E^{(k)}} \right| \leq \left| H^{(1)} - P^{(1)} \right| \cdot \left| \frac{z_{xxy}}{E^{(k)}} \right| + \left| H_x^{(1)} - P_x^{(1)} \right| \cdot \left| \frac{z_{xy}}{E^{(k)}} \right| + \dots = MO\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

und

$$(25^{**}) \quad \left| \frac{F_y}{E^{(k)}} \right| = MO\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right)$$

nebst analogen Formeln für G .

Setzt man nun in den Ausdrücken $M^{(i)}$ und $N^{(i)}$ von (24) für $\frac{A^{(i)}}{A}$, $\frac{A_x^{(i)}}{A}$, $\frac{A_y^{(i)}}{A}$ ihre Werte aus (19), für $\left| \frac{F}{E^{(k)}} \right|$, $\left| \frac{F_x}{E^{(k)}} \right|$, \dots ihre Werte aus (25) ein,

wobei $\frac{F}{E^{(k)}} \cdot \frac{E^{(k)}}{E^{(0)}}$ für $\frac{F}{E^{(0)}}$ zu substituieren ist, und bedenkt, daß $\frac{u}{v}$ und $\frac{v}{u}$ beschränkt sind, so folgert man, indem man die Ausdrücke der rechten Seite stets durch ihre Beträge ersetzt,

$$(26) \quad \left| \frac{z}{E^{(k)}} \right| \leq \sum_{i=1}^4 e^{\gamma_i z + \delta_i v} x^{\gamma_i} y^{\delta_i} O(1) \left| \int_{L_i}^P e^{-(\gamma_i u + \delta_i v)} u^{-\gamma_i} v^{-\delta_i} M \left(\frac{O(1) du}{u^{m+2}} + \frac{O(1) dv}{v^{m+2}} \right) \right|$$

Analoge Formeln erhält man für die Ableitungen z_x, z_y, z_{xy} .

Als Integrationsweg wählen wir stets die Gerade zwischen L_i und P . Es handelt sich nun, wenn man zur Abkürzung den Index i fortläßt, um Ausdrücke der Form

$$MO(1) e^{\gamma x + \delta v} x^{\gamma} y^{\delta} \left| \int_L^P e^{-(\gamma u + \delta v)} u^{-\gamma} v^{-\delta} \left(\frac{du}{u^{m+2}} + \frac{dv}{v^{m+2}} \right) \right|$$

oder, von den Faktoren M und $O(1)$ abgesehen, um

$$J = J_1 + J_2,$$

wo

$$J_1 = e^{\gamma x + \delta v} x^{\gamma+s} \left| \int_L^P \frac{e^{-(\gamma u + \delta v)} du}{u^{\gamma+s+m+2}} \right|$$

und

$$J_2 = e^{\gamma x + \delta v} y^{\gamma+s} \left| \int_L^P \frac{e^{-(\gamma u + \delta v)} dv}{v^{\gamma+s+m+2}} \right|$$

gesetzt ist. Jetzt müssen die obigen vier Fälle von einander getrennt werden.

$$(I.) \quad \gamma \geq 0, \delta \geq 0; L = B.$$

Die Gleichung der Integrationsgeraden PB lautet

$$\frac{v-y}{u-x} = \frac{b-y}{b-x}.$$

Trägt man den daraus gewonnenen Wert

$$\delta v = \delta y + \delta(u-x) \frac{b-y}{b-x}$$

in J_1 ein, so erhält man

$$J_1 = e^{\gamma x} x^{\gamma+s} \int_x^b \frac{e^{-\gamma u} e^{-\delta(u-x) \frac{b-y}{b-x}}}{u^{\gamma+s+m+2}} du.$$

Nun ist

$$b-y \geq 0, \quad b-x \geq 0, \quad \delta \geq 0$$

und auf dem ganzen Integrationswege $u - x \geq 0$, mithin

$$e^{-\delta(u-x) \frac{\delta-y}{\delta-x}} \leq 1,$$

daher

$$J_1 < e^{\gamma x} x^{\gamma+s} \int_x^b \frac{e^{-\gamma u} du}{u^{\gamma+s+m+2}}.$$

Dieser Ausdruck, der bloß noch von der einen Variablen x abhängt, ist bereits beim eindimensionalen Problem aufgetreten und in der Form $O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$ abgeschätzt worden. Wir finden also

$$J_1 = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \text{ ebenso } J_2 = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \text{ folglich } J = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

(II.) $\gamma \leq 0, \delta \leq 0$ mit Ausschluß von $\gamma = 0, \delta = 0$; $L = A$.

Die Gleichung der Integrationsgeraden PA ist

$$\frac{v-a}{u-a} = \frac{y-a}{x-a},$$

woraus

$$\delta v = \delta a + \delta u \frac{y-a}{x-a} - \delta a \frac{y-a}{x-a}$$

folgt. Es wird

$$J_1 = e^{\gamma x + \delta y} x^{\gamma+s} \int_a^x \frac{e^{-\gamma u - \delta a - \delta u \frac{y-a}{x-a} + \delta a \frac{y-a}{x-a}}}{u^{\gamma+s+m+2}} du.$$

Nun ist aber

$$\delta a = O(1)$$

und, wie leicht ersichtlich,

$$\delta u \frac{y-a}{x-a} = \frac{\delta u y}{x} + O(1),$$

$$\delta a \frac{y-a}{x-a} = O(1);$$

daher hat man

$$J_1 = O(1) e^{x\left(\gamma + \frac{\delta y}{x}\right)} x^{\gamma+s} \int_a^x \frac{e^{-u\left(\gamma + \frac{\delta y}{x}\right)}}{u^{\gamma+s+m+2}} du.$$

Da $e^{(x-u)\frac{\delta y}{x}} \leq 1$ ist, folgt

$$J_1 = O(1) e^{\gamma x} x^{\gamma+s} \int_a^x \frac{e^{-\gamma u} du}{u^{\gamma+s+m+2}}.$$

Mithin kann obiger Ausdruck wie der entsprechende beim eindimensionalen Problem auftretende weiter behandelt werden. Es ergibt sich

$$J_1 = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right),$$

sowie analoge Abschätzungen für J_2 und J .

(III.) $\gamma > 0, \delta < 0; L_1 = C$.

Da von allen durch C gehenden, in $S^{(b)}$ verlaufenden Geraden CA den größten Richtungskoeffizienten μ_1 besitzt, so ist der Richtungskoeffizient der Integrationsgeraden CP , d. h.

$$\frac{v-y}{u-x} \leq \mu_1$$

oder

$$\frac{v-y}{u-x} = \mu_1 + \eta, \quad \eta \leq 0.$$

Daraus folgt

$$\delta v = \delta y + \delta \mu_1(u-x) + \delta \eta(u-x),$$

also

$$J_1 = e^{\gamma x} x^{r+s} \int_x^b \frac{e^{-\gamma u - \delta \mu_1(u-x) - \delta \eta(u-x)}}{u^{r+s+m+2}} du.$$

Da $\delta < 0, \eta \leq 0, u-x \geq 0$ ist, hat man $e^{-\delta \eta(u-x)} \leq 1$, demnach

$$J_1 \leq e^{x(\gamma + \delta \mu_1)} x^{r+s} \int_x^b \frac{e^{-u(\gamma + \delta \mu_1)}}{u^{r+s+m+2}} du.$$

Nun ist γ positiv und $\delta \mu_1$ zwar negativ, aber dem Betrage nach beliebig klein, da μ_1 beliebig klein ist; mithin ist $\gamma + \delta \mu_1$ jedenfalls positiv. Der obige Ausdruck ist daher wieder dem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auftretenden analog, und es folgt

$$J_1 = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Um J_2 abzuschätzen, ziehen wir durch den Punkt C , dessen Abszisse b ist und dessen Ordinate wir l nennen wollen, eine Parallele zur x -Achse, welche AD in E schneidet. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

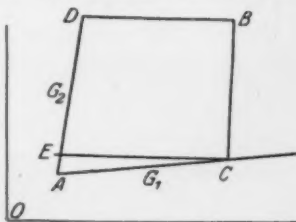


Fig. 3.

P liege in ACE . Setzen wir den Richtungskoeffizienten von PC

$$\frac{v-y}{u-x} = \frac{b-y}{b-x} = \mu,$$

so ist

$$0 \leq \mu \leq \mu_1,$$

also das Differential

$$dv = \mu du = O(1) du$$

und

$$J_3 = O(1) e^{\gamma x + \delta y} x^{r+s} \int_x^b \frac{e^{-(\gamma u + \delta y)} du}{u^{r+s+m+2}} = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

P liege in $ECBD$. Dann ist $y \geq l$ und $u \geq x$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $r+s+m+2 > 0$ ist, da ja m beliebig groß gewählt werden kann. Dann vergrößern wir den Integranden, wenn wir u durch x ersetzen. Mithin ist

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{O(1) e^{\gamma x + \delta y} x^{r+s} e^{-\gamma x}}{x^{r+s+m+2}} \int_l^y e^{-\delta v} dv \\ &= \frac{O(1) e^{\delta y} (e^{-\delta y} - e^{-\delta l})}{x^{m+2} (-\delta)} = O(1) \frac{1 - e^{\delta(y-l)}}{-\delta x^{m+2}} = O\left(\frac{1}{x^{m+2}}\right), \end{aligned}$$

folglich stets

$$J = J_1 + J_3 = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

(IV.) $\gamma < 0, \delta > 0; L = D$.

Dieser Fall wird ebenso wie (III.) behandelt.

Man sieht, daß die vier Summanden auf der rechten Seite von (26) sämtlich in der Form

$$MO\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$

abgeschätzt werden können. Daher ergibt sich

$$\left| \frac{x}{E^{(k)}} \right| < MO\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Wird das Maximum M_0 etwa im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ erreicht, so folgt

$$M_0 < \frac{MO(1)}{x_1^{m+1}} \leq \frac{MO(1)}{a^{m+1}}.$$

Ebenso findet man aus den für die Ableitungen gültigen Formeln

$$M_s < \frac{MO(1)}{a^{m+1}} \quad (s = 1, 2, 3),$$

mithin auch

$$M < \frac{MO(1)}{a^{m+1}}$$

oder

$$1 < \frac{O(1)}{a^{m+1}}.$$

Die letzte Ungleichung ist aber, wenn a von vornherein genügend groß gewählt wird, unmöglich.

Da also (23) keine Lösung besitzt, mithin die Koeffizientendeterminante der C_i in (22) von 0 verschieden ist, kann dieses System, wenn man es durch Wahl der c_i unhomogen macht, wenn man z. B.

$$c_k = 1; \quad c_i = 0, \quad i \leq k$$

setzt, eindeutig nach den C_i aufgelöst werden. Daher besitzt (20) eine und nur eine Lösung. Diese wollen wir mit $z_k^{(b)}$ bezeichnen.

§ 5.

Asymptotische Darstellung.

Für $z_k^{(b)}$ werden wir jetzt eine fundamentale Ungleichung ableiten. Als Ausgangspunkt dient die Gleichung (20), aus der sich unmittelbar

$$(27) \quad \frac{z_k^{(b)}}{E^{(k)}} = 1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0m}^k}{y^m} + \sum_{i=1}^4 O(1) e^{(\alpha_i - \alpha_k)x + (\beta_i - \beta_k)y} x^{\alpha_i - \alpha_k} y^{\beta_i - \beta_k} \int_{L_i}^P [M^{(i)} du + N^{(i)} dv]$$

nebst entsprechenden Gleichungen für die Ableitungen $(z_k^{(b)})_x, (z_k^{(b)})_y, (z_k^{(b)})_{xy}$ ergibt. Wir setzen nun das für $S^{(b)}$ genommene

$$\text{Max} \left| z_k^{(b)} \cdot \frac{1}{E^{(k)}} \right| = M_0^{(b)}, \dots, \text{Max} \left| \frac{\partial^2 z_k^{(b)}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{E^{(k)}} \right| = M_3^{(b)},$$

sowie

$$\text{Max} (M_0^{(b)}, \dots, M_3^{(b)}) = M^{(b)}.$$

Dann findet man durch Abschätzungen, die denen des vorigen Paragraphen völlig entsprechen, die angekündigte Ungleichung

$$\left| z_k^{(b)} \cdot \frac{1}{E^{(k)}} \right| \leq 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Wird das Maximum $M_0^{(b)}$ etwa in $P_1(x_1, y_1)$ erreicht, so folgt

$$M_0^{(b)} < 1 + \frac{O(1)}{x_1} + \frac{M^{(b)} O(1)}{x_1^{m+1}} \leq 1 + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}},$$

ebenso erhält man mittels der für die Ableitungen gültigen Gleichungen

$$M_1^{(b)} < |\alpha_k| + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}},$$

$$M_2^{(b)} < |\beta_k| + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}},$$

$$M_3^{(b)} < |\alpha_k \beta_k| + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}},$$

mithin, wenn $\mu = \text{Max} (1, |\alpha_k|, |\beta_k|, |\alpha_k \beta_k|)$ ist,

$$M^{(b)} < \mu + \frac{O(1)}{a} + \frac{M^{(b)} O(1)}{a^{m+1}}$$

oder

$$M^{(b)} \left(1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}} \right) < \mu + \frac{O(1)}{a}.$$

Wird daher a so groß gewählt, daß etwa

$$1 - \frac{O(1)}{a^{m+1}} > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{O(1)}{a} < \mu$$

ist, so liefert die Ungleichung

$$M^{(b)} < 4\mu$$

die Beschränktheit von $M^{(b)}$.

Auf Grund unserer Abschätzungen können wir (27) die Form geben

$$\frac{z_k^{(b)}}{E^{(k)}} = 1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0m}^k}{y^m} + M^{(b)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right);$$

da aber jetzt $M^{(b)}$ als beschränkt nachgewiesen ist, dürfen wir statt $M^{(b)}$ einfach $O(1)$ schreiben und finden

$$(28) \quad \frac{z_k^{(b)}}{E^{(k)}} = 1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0m}^k}{y^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

wobei P in dem Gebiete $S^{(b)}$ variieren muß. Demnach ist jedenfalls $\frac{z_k^{(b)}}{E^{(k)}}$ bei wachsendem b beschränkt. Der Beweis für die Existenz der Grenzfunktion

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} z_k^{(b)} = z^{(k)}$$

ist dem beim eindimensionalen Problem gelieferten völlig analog. Die asymptotische Darstellung für $z^{(k)}$ ergibt sich jetzt sehr einfach. Aus (28) folgt, wenn man mit b zur Grenze $+\infty$ übergeht,

$$(29) \quad \frac{z^{(k)}}{E^{(k)}} = 1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0m}^k}{y^m} + O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

wobei nun P in dem unendlichen Sektor S variieren darf. Aus (29) erhält man die gewünschte Limesgleichung

$$\lim \left(\frac{z^{(k)}}{E^{(k)}} - 1 - \frac{C_{10}^k}{x} - \dots - \frac{C_{0m}^k}{y^m} \right) x^m = \lim O\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Man kann (29) auch in der Form schreiben

$$(30) \quad z^{(k)} = w^{(k)} + E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right),$$

für die Ableitungen findet man

$$(30^*) \quad \begin{aligned} z_x^{(k)} &= w_x^{(k)} + E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ z_y^{(k)} &= w_y^{(k)} + E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \\ z_{xy}^{(k)} &= w_{xy}^{(k)} + E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

§ 6.

Nachweis der Darstellung bei beliebigem Index $\nu \leq m$.

Nun ist noch darzulegen, daß auch für jedes $\nu \leq m$ die Limesgleichung

$$z^{(k)} = E^{(k)} \left(1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0\nu}^k}{y^\nu} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right) \right)$$

gilt. Diese ist für $\nu < m$ evident; für $\nu > m$ wird sie durch sinngemäße Übertragung der Hornschen Methode folgendermaßen bewiesen: Wir führen die Abschnittsfunktionen

$$\bar{w}^{(k)} = E^{(k)} \left(1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0\nu}^k}{y^\nu} \right)$$

ein, gelangen mit deren Hülfe zu den Integralen

$$\bar{z}^{(k)} = E^{(k)} \left(1 + \frac{C_{10}^k}{x} + \dots + \frac{C_{0\nu}^k}{y^\nu} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right) \right),$$

setzen mit konstanten Koeffizienten

$$(31) \quad z^{(k)} = \sum_{i=1}^i C_i \bar{z}^{(i)}$$

und zeigen, daß in der Summe rechts außer $\bar{z}^{(k)}$ nur solche Integrale $\bar{z}^{(i)}$ wirklich auftreten, für die $R(\alpha_i) \leq R(\alpha_k)$, $R(\beta_i) \leq R(\beta_k)$ ist und wenigstens eins der Ungleichheitszeichen gilt. Um diesen Nachweis zu führen, fassen wir zunächst alle diejenigen $\bar{z}^{(i)}$, für die $R(\alpha_i)$ den größten Wert besitzt ($\bar{z}^{(k)}$ möge nicht gerade zu ihnen gehören), in \sum' , die andern in \sum'' zusammen und erhalten

$$(32) \quad z^{(k)} = \sum' C_i \bar{z}^{(i)} + \sum'' C_i \bar{z}^{(i)}.$$

Aus den $\bar{z}^{(i)}$ von \sum' wählen wir jetzt eins, etwa $z^{(h)}$, aus, das auch den größten reellen Teil von β aufweist, so daß außer

$$R(\alpha_i) = R(\alpha_h)$$

noch

$$(33) \quad R(\beta_i) \leq R(\beta_h)$$

für alle i von \sum' besteht. Ferner möge für diejenigen $\bar{x}^{(i)}$ von \sum' , für die in (33) das Gleichheitszeichen gilt, die Ungleichung

$$(34) \quad R(\varrho_i + \sigma_i) \leq R(\varrho_h + \sigma_h)$$

bestehen. Aus (32) folgt leicht

$$\frac{E^{(k)}}{E^{(h)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sum' C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(h)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum'' C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(h)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{E^{(k)}}{E^{(h)}} &= e^{(\alpha_k - \alpha_h)x + (\beta_k - \beta_h)y} x^{\varrho_k - \varrho_h} y^{\sigma_k - \sigma_h} \\ &= e^{(\alpha_k - \alpha_h)x + (\beta_k - \beta_h)y} x^{\varrho_k + \sigma_k - (\varrho_h + \sigma_h)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\sigma_k - \sigma_h} \end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\sigma_k - \sigma_h} = O(1).$$

Entsprechend den früheren Bezeichnungen haben wir

$$\left| \frac{E^{(k)}}{E^{(h)}} \right| = e^{\gamma_k x + \delta_k y} x^{\gamma_k + \delta_k} O(1),$$

wo nach Voraussetzung $\gamma_k < 0$ sein muß. Wir gehen jetzt mit dem variablen Punkte $P(x, y)$ längs der Geraden G_1 (s. Fig. 1) ins Unendliche. Die Gleichung von G_1 ist

$$y - a = \mu_1 (x - a),$$

woraus

$$y = \mu_1 x + a(1 - \mu_1)$$

folgt.

Dann wird

$$\left| \frac{E^{(k)}}{E^{(h)}} \right| = e^{x(\gamma_k + \delta_k \mu_1)} x^{\gamma_k + \delta_k} O(1).$$

Nun ist

$$\gamma_k + \delta_k \mu_1 < 0,$$

auch wenn $\delta_k > 0$ ist, da μ_1 eine zwar konstante, aber beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Daher wird bei dem speziellen Grenzübergange längs G_1

$$\lim \frac{E^{(k)}}{E^{(h)}} = 0.$$

Ebenso ist auch für die Glieder von \sum''

$$\lim \frac{E^{(i)}}{E^{(h)}} = 0,$$

für die Glieder von \sum' aber sicher

$$(35) \quad \frac{E^{(i)}}{E^{(h)}} = O(1).$$

Für diejenigen Glieder von \sum' , für die nicht sowohl in (33) als auch in (34) das Gleichheitszeichen gilt, ist sogar

$$\lim \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = 0.$$

Für die andern gilt (35), wobei die Unbestimmtheitsgrenzen von $O(1)$ den Wert 0 nicht einschließen. Es kann höchstens drei solche Integrale geben. Nehmen wir an, es existieren tatsächlich drei, die wir mit $\bar{z}^{(1)}$, $\bar{z}^{(2)}$, $\bar{z}^{(3)}$ bezeichnen. Dann folgt

$$\lim \sum' \dots = \lim \sum_{i=1}^3 C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 0$$

oder

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_1, \quad \lim \varepsilon_1 = 0, \quad \text{ebenso} \\ \sum_{i=1}^3 C_i \alpha_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_2, \quad \lim \varepsilon_2 = 0, \\ \sum_{i=1}^3 C_i \beta_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_3, \quad \lim \varepsilon_3 = 0, \\ \sum_{i=1}^3 C_i \alpha_i \beta_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_4, \quad \lim \varepsilon_4 = 0. \end{array} \right.$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben sich aus der Untersuchung der Ableitungen $z_x^{(k)}$, $z_y^{(k)}$, $z_{xy}^{(k)}$. Nun ist wenigstens eine der vier Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \alpha_3 \beta_3 \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden. Denn wären alle 0, so müßte auch

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \alpha_3 \beta_3 & \alpha_4 \beta_4 \end{vmatrix}$$

verschwinden, was nicht der Fall ist (s. § 2). Sei z. B. die erste der obigen vier Determinanten $\neq 0$. Dann benutzen wir das System der ersten drei Gleichungen (36). Das System kann nach den C_i aufgelöst werden; denn die Koeffizientendeterminante ist

$$\begin{vmatrix} \frac{E^{(1)}}{E^{(k)}} & \frac{E^{(2)}}{E^{(k)}} & \frac{E^{(3)}}{E^{(k)}} \\ \alpha_1 \frac{E^{(1)}}{E^{(k)}} & \cdot & \cdot \\ \beta_1 \frac{E^{(1)}}{E^{(k)}} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \frac{E^{(1)}}{E^{(k)}} \frac{E^{(2)}}{E^{(k)}} \frac{E^{(3)}}{E^{(k)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = O(1),$$

und die Unbestimmtheitsgrenzen von $O(1)$ schließen den Wert 0 nicht ein. Daraus folgt unmittelbar

$$C_i = \eta_i, \quad \lim \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da aber die C_i Konstante sind, ist

$$C_i = 0.$$

Würde \sum' nur zwei Glieder $\bar{z}^{(1)}, \bar{z}^{(2)}$ enthalten, für die (35) und nicht $\lim \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = 0$ gilt, so würde man ebenso folgern, daß die Koeffizienten C_1, C_2 dieser beiden Glieder verschwinden, wenn man noch berücksichtigt, daß von den beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

wenigstens eine $\neq 0$ ist. Enthält \sum' nur ein Glied der angegebenen Art, nämlich $\bar{z}^{(k)}$ selbst, so ist die Folgerung $C_k = 0$ trivial.

Durch wiederholte Anwendung des obigen Verfahrens läßt sich beweisen, daß in der Darstellung (31) für $z^{(k)}$ solche Integrale $\bar{z}^{(i)}$ nicht auftreten, in denen $R(\alpha_i) > R(\alpha_k)$ oder $R(\beta_i) > R(\beta_k)$ ist (wobei im Falle der zweiten Ungleichung der spezielle Grenzübergang längs G_2 zu benutzen ist), und ebensowenig diejenigen, für die $R(\alpha_i) = R(\alpha_k)$, $R(\beta_i) = R(\beta_k)$, aber $R(\varrho_i + \sigma_i) > R(\varrho_k + \sigma_k)$ ist.

Wir kommen jetzt zu denjenigen $\bar{z}^{(i)}$, für die

$$R(\alpha_i) = R(\alpha_k), \quad R(\beta_i) = R(\beta_k), \quad R(\varrho_i + \sigma_i) = R(\varrho_k + \sigma_k)$$

ist, und fassen diese in \sum' (wobei aber $\bar{z}^{(k)}$ besonders aufgeführt wird), die andern in \sum'' zusammen. Dann wird

$$E^{(k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = C_k E^{(k)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum' C_i E^{(i)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum'' C_i E^{(i)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Hieraus folgt leicht

$$C_k - 1 + \sum' C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_1, \quad \lim \varepsilon_1 = 0,$$

ebenso

$$(C_k - 1)a_k + \sum' C_i a_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = \varepsilon_2, \text{ usw.}$$

Mithin ist wieder

$$C_k - 1 = 0, \quad C_k = 1$$

und

$$C_i = 0$$

für alle Glieder von \sum' .

Wir fassen jetzt diejenigen $\bar{f}^{(i)}$, für die

$$R(\alpha_i) = R(\alpha_k), \quad R(\beta_i) = R(\beta_k), \quad R(\varrho_i + \sigma_i) < R(\varrho_k + \sigma_k)$$

gilt, in \sum' zusammen und bekommen

$$z^{(k)} = \bar{z}^{(k)} + \sum' C_i \bar{f}^{(i)} + \sum'' C_i \bar{f}^{(i)}$$

nebst entsprechenden Gleichungen für die Ableitungen. Unter Berücksichtigung von

$$\bar{z}^{(k)} - z^{(k)} = E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \quad \bar{z}_x^{(k)} - z_x^{(k)} = E^{(k)} O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right), \dots$$

ergibt sich

$$\sum' C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) = O\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right).$$

Nun ist

$$\frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} = e^{(\alpha_i - \alpha_k)x + (\beta_i - \beta_k)y} x^{\varrho_i + \sigma_i - (\varrho_k + \sigma_k)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\sigma_i - \sigma_k} = x^{r_i + s_i} O(1),$$

wo die Unbestimmtheitsgrenzen von $O(1)$ die Null nicht einschließen. Die Zahl m sei so groß gewählt, daß für jedes i

$$r_i + s_i + m > 0$$

ist.

Dann ergibt sich nach Multiplikation mit x^m , wenn man

$$\frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) x^m = x^{r_i + s_i + m} O(1) = f_i$$

setzt,

$$\begin{aligned} \sum' C_i f_i &= \varepsilon_1, \quad \lim \varepsilon_1 = 0, \\ \sum' C_i a_i f_i &= \varepsilon_2, \quad \lim \varepsilon_2 = 0, \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante der C_i ist jetzt, wenn \sum' etwa drei Glieder enthält,

$$f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

und wird sogar mit wachsendem x unendlich groß. Daher verschwinden alle C_i von \sum' .

Wir erhalten also schließlich

$$z^{(k)} = \bar{z}^{(k)} + \sum^+ C_i \bar{z}^{(i)},$$

wo in \sum^+ tatsächlich nur solche $\bar{z}^{(i)}$ auftreten, für die

$$R(\alpha_i) \leq R(\alpha_k), \quad R(\beta_i) \leq R(\beta_k)$$

ist und wenigstens eins der Ungleichheitszeichen gilt. Demnach wird

$$z^{(k)} = E^{(k)} \left\{ 1 + \frac{C_{10}^{(k)}}{x} + \dots + \frac{C_{0\nu}^{(k)}}{y^\nu} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right) + \sum^+ C_i \frac{E^{(i)}}{E^{(k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right\}.$$

Da aber jedes $\frac{E^{(i)}}{E^{(k)}}$ in \sum^+ unendlich klein von beliebig hoher Ordnung in Bezug auf $\frac{1}{x}$ ist, folgt die gewünschte Limesgleichung

$$z^{(k)} = E^{(k)} \left(1 + \frac{C_{10}^{(k)}}{x} + \dots + \frac{C_{0\nu}^{(k)}}{y^\nu} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right) \right).$$

Was die Verallgemeinerung der Ergebnisse dieses Kapitels betrifft, so bemerken wir, daß unsere Methode auf irgend ein System simultaner partieller linearer Gleichungen beliebiger Ordnung angewandt werden kann, wenn nur das allgemeine Integral des Systems von willkürlichen Konstanten und nicht von willkürlichen Funktionen abhängt. Ferner darf die Entwicklung der Koeffizienten $P^{(i)}$ und $Q^{(i)}$ positive Potenzen von x und y in endlicher Zahl aufweisen, was dem Falle eines höheren Ranges entspricht, während unserm System (1) der Rang 1 zuzuschreiben ist. Der Exponent von ϵ wird alsdann eine ganze rationale Funktion höheren Grades sein. Es können auch mehrfache Wurzelpaare des charakteristischen Gleichungssystems zugelassen werden, was ein Auftreten von Reihen, die nach gebrochenen negativen Potenzen von x und y fortschreiten, und von Logarithmen zur Folge haben wird. Endlich ist klar, daß die Ausdehnung auf ein Gebiet von drei oder mehr Dimensionen ebenfalls keine Schwierigkeiten mehr macht außer solchen, die von komplizierteren Rechnungen herrühren.

(Angenommen 10. 2. 1920.)

Über lineare Somenmannigfaltigkeiten.

Von

Hans Beck in Bonn.

1. In die analytische Kinematik ist als Grundbegriff von Study das *Soma* eingeführt worden¹⁾, irgendeine der ∞^6 Lagen eines starren Körpers, von dessen Begrenzung abgesehen wird. Als anschaulicher Vertreter des *Soma* dient ein mit dem starren Körper fest verbundenes Trieder. Das Trieder der Koordinatenachsen wird als *Protosoma* angesehen. Aus ihm entsteht durch eine Bewegung ein „*rechtseitiges*“, durch eine Umlegung ein „*linkseitiges*“ *Soma*. Das *Protosoma* ist dann also selbst als rechtseitig zu bezeichnen.

Es ist üblich, die jetzt *Soma* genannte Figur durch zwölf Bestimmungsstücke darzustellen. Das *Soma* hat einen *Mittelpunkt* (für das *Protosoma* der Koordinatenanfangspunkt). Dieser absorbiert drei Bestimmungsstücke, etwa, in gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten (x, y, z) . Ferner hat das *Soma* drei *Achsen*, d. i. *orientierte* Gerade. Als *erste* Achse werde die bezeichnet, die aus der *X*-Achse des *Protosoma* hervorgegangen ist. Sie wird durch ihre drei Richtungskosinus (p_1, q_1, r_1) dargestellt; *deren Verhältnisse genügen nicht*. Die beiden andern Achsen verlangen zu ihrer Festlegung weitere zwei Tripel von Bestimmungsstücken (p_2, q_2, r_2) und (p_3, q_3, r_3) .

Dieser Darstellung des *Soma* wohnt zwar eine gewisse Symmetrie inne. Sie ist aber dadurch erkaufte, daß zwischen den neun letzten dieser Bestimmungsstücke nicht weniger als *zwölf* quadratische Relationen bestehen

$$(1) \quad \begin{array}{ll} p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = 1, \text{ usw.} & p_2 p_3 + q_2 q_3 + r_2 r_3 = 0, \text{ usw.} \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \text{ usw.} & q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = 0, \text{ usw.} \end{array}$$

¹⁾ Geom. d. Dynam., Anhang S. 556, 557. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., 12 (1913), S. 36–60.

Dazu kommt noch eine weitere

$$(1a) \quad |p_1 q_2 r_3| = \pm 1,$$

wo das obere Vorzeichen für die rechtseitigen Somen gilt.

Die Folge ist, daß dieser analytische Apparat doch nur schwerfällig arbeitet, schon, wenn es sich nur um zwei oder drei Somen handelt.

Es gelingt nun aber, die Anzahl der Relationen (1) auf *eins* herabzudrücken, wenn man sich einer anderen Darstellung des Soma bedient. Als *Koordinaten* eines rechtseitigen Soma sollen benutzt werden *acht* Verhältnißgrößen

$$\bar{x}_0 : \bar{x}_{01} : \bar{x}_{02} : \bar{x}_{03} : \quad \bar{x}_{123} : \bar{x}_{23} : \bar{x}_{31} : \bar{x}_{12},$$

zwischen denen nur die eine einzige Relation besteht

$$(2) \quad \bar{x}_0 \bar{x}_{123} + \bar{x}_{01} \bar{x}_{23} + \bar{x}_{02} \bar{x}_{31} + \bar{x}_{03} \bar{x}_{12} = 0.$$

Führen wir die Abkürzung ein

$$(3) \quad (\bar{x}|\bar{x}) = \bar{x}_0^2 + \bar{x}_{01}^2 + \bar{x}_{02}^2 + \bar{x}_{03}^2,$$

so soll sein

$$(\bar{x}|\bar{x}) p_1 = \bar{x}_0^2 + \bar{x}_{01}^2 - \bar{x}_{02}^2 - \bar{x}_{03}^2,$$

$$(4) \quad (\bar{x}|\bar{x}) q_1 = 2(\bar{x}_{01} \bar{x}_{02} - \bar{x}_0 \bar{x}_{03}),$$

$$(\bar{x}|\bar{x}) r_1 = 2(\bar{x}_{01} \bar{x}_{03} + \bar{x}_0 \bar{x}_{02}).$$

Hieraus sollen sich durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ergeben: aus der ersten Zeile q_2 und r_3 , aus der zweiten r_2 und p_3 , aus der dritten p_2 und q_3 .

Dadurch sind dann bereits alle Relationen (1) befriedigt, ebenso (1a), wenn man dort rechts das Pluszeichen nimmt.

Endlich sei für den Mittelpunkt (x, y, z) des Soma

$$(5) \quad \begin{aligned} (\bar{x}|\bar{x}) x &= 2(\bar{x}_{02} \bar{x}_{12} - \bar{x}_{03} \bar{x}_{31} - \bar{x}_0 \bar{x}_{23} + \bar{x}_{123} \bar{x}_{01}), \\ (\bar{x}|\bar{x}) y &= 2(\bar{x}_{03} \bar{x}_{22} - \bar{x}_{01} \bar{x}_{12} - \bar{x}_0 \bar{x}_{31} + \bar{x}_{123} \bar{x}_{02}), \\ (\bar{x}|\bar{x}) z &= 2(\bar{x}_{01} \bar{x}_{31} - \bar{x}_{02} \bar{x}_{23} - \bar{x}_0 \bar{x}_{12} + \bar{x}_{123} \bar{x}_{03}). \end{aligned}$$

Ist umgekehrt das Soma durch die üblichen Bestimmungstücke $(x, y, z, p_1, \dots, r_3)$ gegeben, so ermitteln sich seine Koordinaten in zwei Schritten. Zunächst ist

$$(6a) \quad \begin{array}{ccccccc} \bar{x}_0 & : & \bar{x}_{01} & : & \bar{x}_{02} & : & \bar{x}_{03} \\ = 1 + p_1 + q_2 + r_3 & : & q_3 - r_2 & : & r_1 - p_3 & : & p_2 - q_1 \\ q_3 - r_2 & : & 1 + p_1 - q_2 - r_3 & : & p_3 + q_1 & : & r_1 + p_2 \\ r_1 - p_3 & : & p_3 + q_1 & : & 1 - p_1 + q_2 - r_3 & : & q_2 + r_3 \\ p_2 - q_1 & : & r_1 + p_2 & : & q_3 + r_2 & : & 1 - p_1 - q_2 + r_3 \end{array}$$

Jedes dieser vier Formelsysteme kann versagen; eins bleibt aber stets brauchbar. Hat man so die Verhältnisse der $\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03}$ gefunden, so folgen die übrigen vier Koordinaten des Soma aus den weiteren Formeln

$$(6b) \quad \begin{aligned} 2\mathfrak{X}_{123} &= * + x\mathfrak{X}_{01} + y\mathfrak{X}_{02} + z\mathfrak{X}_{03}, \\ 2\mathfrak{X}_{23} &= -x\mathfrak{X}_0 + * - z\mathfrak{X}_{02} + y\mathfrak{X}_{03}, \\ 2\mathfrak{X}_{31} &= -y\mathfrak{X}_0 + z\mathfrak{X}_{01} * - x\mathfrak{X}_{03}, \\ 2\mathfrak{X}_{12} &= -z\mathfrak{X}_0 - y\mathfrak{X}_{01} + x\mathfrak{X}_{02} * \end{aligned}$$

Damit die Formeln (4), (5) Sinn haben, ist zu fordern $(\mathfrak{X}|\mathfrak{X}) \neq 0$. Dann reden wir von einem *eigentlichen* (rechtseitigen) Soma. Aber es soll der Begriff des Soma auch auf den soeben ausgeschlossenen Fall ausgedehnt werden, d. i. da wir hier *nur reelle* Größen betrachten, auf den Fall

$$\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = 0.$$

Dann reden wir von einem *uneigentlichen* (rechtseitigen) Soma. Es heißt also jetzt rechtseitiges Soma *jedes System von acht reellen Verhältnissen \mathfrak{X} , welches der Relation (2) genügt*.

Die uneigentlichen Somen schweben vor der Hand völlig in der Luft; sie sind einstweilen nur formal erklärt. In § 5 werden wir sehen, daß einem uneigentlichen Soma zugeordnet werden kann ein *geordnetes Tripel orientierter Richtungen*.

Der Grund für die Einführung der uneigentlichen Somen liegt in folgendem Satz, der sich unmittelbar aus (2) ergibt:

Satz 1. *Die Gesamtheit der ∞^6 eigentlichen und ∞^3 uneigentlichen reellen Somen läßt sich lückenlos umkehrbar eindeutig abbilden auf die Gesamtheit der reellen Punkte einer sechsfach ausgedehnten singularitätenfreien quadratischen Mannigfaltigkeit M_6^3 von der Signatur Null, die in einem Raum R_7 von sieben Dimensionen verläuft.*

Damit ergibt sich eine Forschungsmethode; zugleich wird aber auch die Kinematik als allgemeineres Gegenstück zur Liniengeometrie erkannt; dort bilden sich die geraden Linien bekanntlich auf die Punkte einer M_4^3 ab, deren Gleichung aus (2) durch „Verkürzung“ folgt, d. i. dadurch, daß man alle Glieder mit \mathfrak{X}_0 und \mathfrak{X}_{123} fortläßt. Indessen werden sich auch zahlreiche Dinge ergeben, die *kein* Analogon in der Liniengeometrie haben, sondern erst wiederkehren, wenn die Zahl der Dimensionen um vier abgeändert wird, und diese werden unser besonderes Interesse beanspruchen.

2. Die Kollineation (homogene Punktkoordinaten; $x = x_1 : x_0$, usw.)

$$(7) \quad \begin{aligned} x'_0 &= a_{00}x_0, \\ x'_i &= a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned}$$

ist eine *Bewegung*, wenn die Koeffizienten gewissen wohlbekannten Relationen genügen. Diese werden sämtlich befriedigt, wenn man acht homogene *Parameter*

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \quad \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

eingührt²⁾, die nur der einen einzigen quadratischen Relation genügen

$$(8) \quad \alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0,$$

und überdies der Ungleichheit unterworfen sind

$$(9) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0.$$

Man hat dann zu setzen

$$(10) \quad \begin{aligned} a_{00} &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ a_{11} &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \dots \\ a_{22} &= 2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_0 \alpha_1), \dots \\ a_{33} &= 2(\alpha_3 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_1), \dots \\ a_{10} &= 2(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 - \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0), \dots \end{aligned}$$

Durch die Punkte hinter den letzten vier Zeilen soll hier, *wie auch fernerhin immer*, angedeutet werden, daß zwei Reihen fehlen, die durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 zu bilden sind.

Jedes System solcher acht Parameter (α, β), welches den Forderungen (8) und (9) genügt, liefert so eine Bewegung, und *umgekehrt*.

Sie ist eine *Schiebung* für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_0 = 0$. Orientiert man die Schiebungsrichtung dadurch, daß man ihre Kosinus festlegt (d. i. nicht bloß ihre Verhältnisse), so ist die *Schrittweite* $2H_0^*$ der Schiebung eindeutig bestimmt:

$$(11) \quad \cos \lambda_1 : \cos \lambda_2 : \cos \lambda_3 : H_0^{*-1} = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : -\alpha_0,$$

d. i.

$$\cos \lambda_1 = \beta_1 : \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}, \dots \quad H_0^* = -\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} : \alpha_0,$$

wo der Quadratwurzel ein beliebiger Wert beizulegen ist, aber beidemale derselbe.

In allen übrigen Fällen gibt es eine *Achse der Bewegung*. Ihre Plückerschen Koordinaten

$$\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{12} : \mathfrak{P}_{13} : \mathfrak{P}_{23}$$

²⁾ Study, Von den Bewegungen und Umlegungen. Math. Ann., 39 (1891), S. 527, 528. Bedauerlicher Weise hat sich dort an *entscheidender Stelle* ein Vorzeichenfehler eingeschlichen, der in Geom. d. Dyn. berichtigt ist, uns aber hier nötigt, besonders bei den Umlegungen länger zu verweilen, als sonst erforderlich wäre.

entnimmt man aus den Formeln

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{P}_{01} &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \alpha_1, \dots \\ \mathfrak{P}_{23} &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \beta_1 + \alpha_0 \beta_0 \alpha_1, \dots \end{aligned}$$

Orientiert man sie durch Verfügung über das Vorzeichen von $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, so wird die *Schrittweite* $2H_0$ eindeutig und der *Drehungswinkel* $2\Theta_0$ bis auf Vielfache von 2π bestimmt:

$$(13) \quad \cot \Theta_0 = -\alpha_0 : \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \quad H_0 = +\beta_0 : \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Dazu ist noch eine Bemerkung zu machen, die auch schon für (11) gilt, und die künftig nicht wiederholt werden soll. Belastet man die α, β mit einem Proportionalitätsfaktor $\varrho \neq 0$, so ist auch $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ mit ϱ , und nicht etwa mit $-\varrho$ zu multiplizieren.

Ist $\alpha_0 = 0$, so wird $2\Theta_0 = \pi \pmod{2\pi}$. Diese ∞^3 Schraubungen spielen für die weiteren Betrachtungen eine wesentliche Rolle und heißen *Umschraubungen*³⁾.

Ist $\beta_0 = 0$, ohne daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ist, so liegt ($2H_0 = 0$) eine *Drehung* vor. Den Durchschnitt der Drehungen mit den Umschraubungen bilden die ∞^4 involutorischen Bewegungen; sie heißen *Umwendungen*⁴⁾ ($\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$).

Ist eine *Schiebung* durch ihre orientierte Schiebungsrichtung ($\cos \lambda_1, \cos \lambda_2, \cos \lambda_3$) und Schrittweite $2H_0^*$ gegeben, so heißen nach (11) ihre Parameter

$$(14) \quad -H_0^{*-1} : 0 : 0 : 0 : 0 : \cos \lambda_1 : \cos \lambda_2 : \cos \lambda_3.$$

Die übrigen Bewegungen werden durch die (*orientierte*) Achse \mathfrak{P} , die Schrittweite $2H_0$ und den Drehungswinkel $2\Theta_0$ charakterisiert. Ihre Parameter sind dann

$$(15) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= -\cot \Theta_0 \sqrt{\mathfrak{P}_{01}^2 + \mathfrak{P}_{02}^2 + \mathfrak{P}_{03}^2}, \quad \alpha_1 = \mathfrak{P}_{01}, \dots \\ \beta_0 &= +H_0 \sqrt{\mathfrak{P}_{01}^2 + \mathfrak{P}_{02}^2 + \mathfrak{P}_{03}^2}, \quad \beta_1 = \mathfrak{P}_{23} + H_0 \cot \Theta_0 \mathfrak{P}_{01}, \dots \end{aligned}$$

Das Soma \mathfrak{X} entsteht aus dem Protosoma durch die Bewegung mit den Parametern

$$(16) \quad \alpha_0 = \mathfrak{X}_0, \alpha_1 = \mathfrak{X}_{01}, \dots, \quad \beta_0 = \mathfrak{X}_{123}, \beta_1 = \mathfrak{X}_{23}, \dots$$

Somenkoordinaten und Bewegungsparameter sind also im wesentlichen identisch. Wir hätten mit einem dieser Größensysteme auskommen können. Wir glauben aber durch die Trennung das Verständnis zu erleichtern.

³⁾ Math. Ann., 39 (1891), S. 461.

⁴⁾ H. Wiener, Sächs. Berichte 1890.

3. Ein *linkseitiges* Soma entsteht aus dem Protosoma durch eine *Umlegung*, und daher soll jetzt das Nötigste über diese Transformationen gesagt werden.

Die Kollineation

$$(17) \quad \begin{aligned} x'_0 &= -a_{00}x_0, \\ x'_i &= a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned}$$

ist eine Umlegung, wenn die Koeffizienten durch (10) ersetzt werden, bei Berücksichtigung von (8) und (9). Wir ziehen aber vor, Verwechslungen durch eine andere Bezeichnungsweise vorzubeugen. Die acht homogenen *Umlegungsparameter* nennen wir, wie es Hr. Study neuerdings getan hat,

$$\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \quad \delta_0 : \delta_1 : \delta_2 : \delta_3.$$

Sie genügen der Gleichung

$$(18) \quad \gamma_0\delta_0 + \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = 0$$

und der Ungleichheit

$$(19) \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \neq 0.$$

Es soll also sein (vgl. (10))

$$(20) \quad \begin{aligned} a_{00} &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \\ a_{11} &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2, \dots \\ a_{22} &= 2(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_0\gamma_1), \dots \quad a_{33} = 2(\gamma_3\gamma_2 - \gamma_0\gamma_1), \dots \\ a_{10} &= 2(\gamma_2\delta_3 - \gamma_3\delta_2 - \gamma_0\delta_1 + \gamma_1\delta_0), \dots \end{aligned}$$

Die Umlegung (17) läßt die *eigentliche* Ebene $\delta_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$ und den auf ihr gelegenen Punkt $\gamma_0 : \delta_1 : \delta_2 : \delta_3$ in Ruhe (*Mittelebene* und *Mittelpunkt* der Umlegung). Beide können unbestimmt werden (aber nicht gleichzeitig!); dann erhält man die $2 \cdot \infty^3$ involutorischen Umlegungen, nämlich

die *Spiegelung an der (eigentlichen) Ebene* u (*Mittelpunkt* unbestimmt):

$$(21) \quad 0 : u_1 : u_2 : u_3 : \quad u_0 : 0 : 0 : 0,$$

und die *Spiegelung am (eigentlichen) Punkt* ξ (*Mittelebene* unbestimmt):

$$(22) \quad \xi_0 : 0 : 0 : 0 : \quad 0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3.$$

Der Mittelpunkt ξ kann *uneigentlich* werden ($\gamma_0 = 0$). Dann läßt sich die Umlegung erzeugen durch die Spiegelung an der *Mittelebene* und eine mit ihr vertauschbare Schiebung parallel zur *Mittelebene*, deren Richtung senkrecht läuft zu der nach dem uneigentlichen Mittelpunkt. Die Schrittweite $2H_0^*$ dieser Schiebung ist nach Orientierung der Schiebungsrichtung

eindeutig bestimmt, und heiße dann Schrittweite *der Umlegung*. Diese Schiebungsrichtung sei

$$(23) \quad \cos \lambda_1 = \frac{u_1 \xi_1 - u_2 \xi_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}, \dots$$

Dann lassen sich die Parameter der Umlegung so schreiben:

$$(23) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= 0, & \gamma_1 &= u_1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \dots \\ \delta_0 &= u_0 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, & \delta_1 &= -H_0^* \xi_1 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \dots \end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} H_0^* &= -\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} \cdot \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}, \\ \cos \lambda_1 &= \gamma_2 \delta_3 - \gamma_3 \delta_2 \cdot \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \cdot \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}, \dots \end{aligned}$$

Endlich ist noch der „allgemeine“ Fall zu betrachten ($\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \neq 0$). Mittelpunkt und Mittelebene sind bestimmt und eigentlich und bestimmen überdies die Gerade mit den Plckerschen Koordinaten

$$(24) \quad \gamma_0 \gamma_1 : \gamma_0 \gamma_2 : \gamma_0 \gamma_3 : \gamma_3 \delta_2 - \gamma_2 \delta_3 : \gamma_1 \delta_3 - \gamma_3 \delta_1 : \gamma_2 \delta_1 - \gamma_1 \delta_2,$$

die Normale auf der Mittelebene im Mittelpunkt. Sie heiße *Achse* der Umlegung. Diese läßt sich jetzt erzeugen durch eine Drehung um die Achse und eine mit ihr vertauschbare Spiegelung. Je nachdem letztere die Spiegelung an der Mittelebene oder am *Mittelpunkt* ist, fällt der Drehungswinkel verschieden aus (der Unterschied beträgt π). Wir entscheiden uns, wenn wir vom *Drehungswinkel* $2\Theta_0$ *der Umlegung* reden, für die *zweite* Möglichkeit, denn dann wird analog zu (13)

$$(25) \quad \cot \Theta_0 = -\gamma_0 \cdot \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2},$$

wenn als siebente Koordinate zur Orientierung der Umlegungsachse genommen wird

$$\gamma_0 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}.$$

Sind umgekehrt gegeben die (orientierte) Mittelebene u und der Mittelpunkt ξ , so ist die Umlegungsachse bereits orientiert; ist dann $2\Theta_0$ der Drehungswinkel der Umlegung, so hat diese die Parameter

$$(26) \quad \begin{aligned} \gamma_0 &= -\cot \Theta_0 \xi_0 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, & \gamma_1 &= u_1 \xi_0, \dots \\ \delta_0 &= u_0 \xi_0, & \delta_1 &= -\cot \Theta_0 \xi_1 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}, \dots \end{aligned}$$

Als Koordinaten des *linkseitigen Soma*, welches aus dem Protosoma durch die Umlegung (γ, δ) hervorgeht, können dann benutzt werden die acht Verhltnisgren

$$(27) \quad x_0^I = \gamma_0, \quad x_{01}^I = \gamma_1, \dots, \quad x_{12}^I = \delta_0, \quad x_{23}^I = \delta_1, \dots,$$

die der quadratischen Relation genügen

$$(28) \quad x_0^i x_{123}^i + x_{01}^i x_{23}^i + x_{02}^i x_{31}^i + x_{03}^i x_{12}^i = 0.$$

Somit tritt diese Relation schon zum vierten Male auf, jedesmal in anderer Bedeutung, und es werden späterhin (§ 10) noch zwei (vier) andere Deutungen zu behandeln sein. Darum die wechselnde Bezeichnung bei gleichbleibendem analytischen Grundgedanken!

4. Ein eigentliches *rechtseitiges* Soma hatten wir durch eine Bewegung aus dem *Protosoma* gewonnen. Jetzt seien zwei eigentliche rechtseitige Somen \mathcal{X} und \mathcal{Y} gegeben, wo also \mathcal{X} nicht mehr das Protosoma zu sein braucht. Wir suchen die Bewegung, die \mathcal{X} in \mathcal{Y} überführt. Für ihre Parameter findet man

$$(29) \quad \begin{aligned} \alpha_0 = (\mathcal{X}/\mathcal{Y}) &= x_0 y_0 + x_{01} y_{01} + x_{02} y_{02} + x_{03} y_{03}, \\ \alpha_1 &= x_0 y_{01} - x_{01} y_0 - x_{02} y_{03} + x_{03} y_{02}, \dots \\ \beta_0 = (\mathcal{X}\mathcal{Y}) &= x_0 y_{123} + x_{01} y_{23} + x_{02} y_{31} + x_{03} y_{12} \\ &\quad + x_{123} y_0 + x_{23} y_{01} + x_{31} y_{02} + x_{12} y_{03}, \\ \beta_1 &= x_0 y_{23} - x_{01} y_{123} - x_{02} y_{12} + x_{03} y_{31} \\ &\quad + x_{123} y_{01} - x_{23} y_0 - x_{31} y_{03} + x_{12} y_{02}, \dots \end{aligned}$$

Diese Formeln geben, nach den \mathcal{Y} aufgelöst, im Grunde genommen lediglich die Zusammensetzung zweier Bewegungen an, und lassen sich sehr elegant zusammenfassen, wenn man sich gewisser Biquaternionen bedient^{a)}. Wir verzichten auf dieses Hilfsmittel hier absichtlich. Die erwähnte Auflösung der Formeln (29) nach den \mathcal{Y} ist durch die Formeln (36) vollzogen.

Das in der ersten Formel (29) auftretende abkürzende Symbol $(\mathcal{X}/\mathcal{Y})$ (lies: \mathcal{X} in \mathcal{Y} !) umfaßt als Sonderfall das in (3) auftretende und geht aus diesem durch einen Polarisationsprozeß hervor. Ein weiteres abkürzendes Symbol tritt in der dritten Zeile von (29) auf. Mit seiner Hilfe läßt sich die zwischen den Koordinaten eines Soma bestehende quadratische Relation (2) kurz so schreiben:

$$(2) \quad \frac{1}{2}(\mathcal{X}\mathcal{X}) = 0.$$

Aus (29) folgt

$$(30) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\mathcal{X}/\mathcal{X})(\mathcal{Y}/\mathcal{Y}) - (\mathcal{X}/\mathcal{Y})^2,$$

und daher erhält man für den Drehungswinkel 2Θ und die Schrittweite $2H$ dieser Bewegung nach (13) und (29) die Ausdrücke

$$(31) \quad \cot \Theta = - \frac{(\mathcal{X}/\mathcal{Y})}{\sqrt{(\mathcal{X}/\mathcal{X})(\mathcal{Y}/\mathcal{Y}) - (\mathcal{X}/\mathcal{Y})^2}}, \quad H = + \frac{(\mathcal{X}\mathcal{Y})}{\sqrt{(\mathcal{X}/\mathcal{X})(\mathcal{Y}/\mathcal{Y}) - (\mathcal{X}/\mathcal{Y})^2}}.$$

^{a)} Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 12 (1913), S. 40.

Wir erklären die beiden Größen Θ und H jetzt als *Winkel* und *Abstand* der beiden Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} . Denn durch den in § 1 beschriebenen Verkürzungsprozeß gehen sie über in Winkel und Abstand der beiden (nicht parallel vorausgesetzten) geraden Linien \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} .

Weiter ergibt sich zwanglos folgende Terminologie:

Zwei eigentliche Somen heißen zueinander *parallel*, wenn jedes aus dem andern durch eine *Schiebung* gewonnen werden kann. Die beiden Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} sind zueinander parallel für

$$(32) \quad \mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} = \mathfrak{Y}_0 : \mathfrak{Y}_{01} : \mathfrak{Y}_{02} : \mathfrak{Y}_{03}$$

und dadurch wird Parallelität von Somen definiert, wenn uneigentliche Somen in Frage kommen. Dann sind alle uneigentlichen Somen untereinander, und auch zu jedem eigentlichen Soma parallel.

Kann jedes der beiden eigentlichen Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} aus dem andern durch eine *Drehung* gewonnen werden, so sagen wir, die beiden Somen *schneiden sich*. Die notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür,

$$(33) \quad (\mathfrak{X} \mathfrak{Y}) = 0,$$

dient wieder dazu, den Begriff auf uneigentliche Somen zu erstrecken.

Es ist nützlich, ein Wort zur Verfügung zu haben, welches aussagt, daß die beiden Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} entweder parallel sind oder sich schneiden. Dann nennen wir sie *inzident*. Für die Inzidenz ist dann (33) notwendig und hinreichend.

Für $(\mathfrak{X} \mathfrak{Y}) \neq 0$ sollen die beiden Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} zueinander *windschief* heißen. Jedes kann dann aus dem andern durch eine *Schraubung* gewonnen werden, die sich also nicht auf eine Drehung oder Schiebung reduziert.

Ist diese insbesondere eine *Umschraubung*, so nennen wir die beiden Somen zueinander *orthogonal*⁶⁾:

$$(34) \quad (\mathfrak{X} / \mathfrak{Y}) = 0.$$

Dadurch wird dann der Begriff wieder auf uneigentliche Somen ausgedehnt.

Geht endlich jedes Soma aus dem andern durch eine *Umwendung* hervor, so sind beide als *sich senkrecht schneidend*⁷⁾ zu bezeichnen:

$$(\mathfrak{X} / \mathfrak{Y}) = 0, \quad (\mathfrak{X} \mathfrak{Y}) = 0.$$

Der aus (31) zu bildende Ausdruck rechts in

$$(35) \quad H \operatorname{tg} \Theta = - (\mathfrak{X} \mathfrak{Y}) : (\mathfrak{X} / \mathfrak{Y})$$

⁶⁾ Hemisymmetral bei Study.

⁷⁾ Symmetral bei Study.

ist *rational* und heiße das *Moment* der beiden Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} ^{*)}, oder auch das Moment der Bewegung, die \mathfrak{X} in \mathfrak{Y} überführt.

Der Vollständigkeit halber geben wir auch eine Maßgröße H^* für eigentliche *parallele* Somen. Die Schrittweite $2H^*$ der Schiebung, die \mathfrak{X} in \mathfrak{Y} überführt, kann unter Benutzung des weiterhin nicht gebrauchten Symbols

$$\{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\} = \mathfrak{X}_{123}\mathfrak{Y}_{123} + \mathfrak{X}_{23}\mathfrak{Y}_{23} + \mathfrak{X}_{31}\mathfrak{Y}_{31} + \mathfrak{X}_{12}\mathfrak{Y}_{12}$$

aus der Formel ermittelt werden (Herleitung durch (11) und (29))

$$H^* = -\sqrt{(\mathfrak{X}/\mathfrak{X})\{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}\} - 2(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})\{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}\} + (\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y})\{\mathfrak{X}/\mathfrak{X}\} : (\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})},$$

die sich unter Verzicht auf Symmetrie einfacher schreiben läßt und durch Verkürzung übergeht in den Ausdruck für den Abstand paralleler Geraden. Daher heiße H^* der *Abstand* der *parallelen* Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} .

Wir führen noch zwei Formelsysteme an, von denen im folgenden vielfach Gebrauch zu machen ist.

Das *eigentliche rechtseitige* Soma \mathfrak{Y} , welches aus dem *eigentlichen rechtseitigen* Soma \mathfrak{X} durch die Bewegung (α, β) hervorgeht, heißt

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_0 &= \alpha_0 \mathfrak{X}_0 - \alpha_1 \mathfrak{X}_{01} - \alpha_2 \mathfrak{X}_{02} - \alpha_3 \mathfrak{X}_{03}, \\ \mathfrak{Y}_{01} &= \alpha_1 \mathfrak{X}_0 + \alpha_0 \mathfrak{X}_{01} + \alpha_2 \mathfrak{X}_{02} - \alpha_3 \mathfrak{X}_{03}, \dots \\ \mathfrak{Y}_{123} &= \beta_0 \mathfrak{X}_0 - \beta_1 \mathfrak{X}_{01} - \beta_2 \mathfrak{X}_{02} - \beta_3 \mathfrak{X}_{03} \\ &\quad + \alpha_0 \mathfrak{X}_{123} - \alpha_1 \mathfrak{X}_{23} - \alpha_2 \mathfrak{X}_{31} - \alpha_3 \mathfrak{X}_{12}, \\ \mathfrak{Y}_{23} &= \beta_1 \mathfrak{X}_0 + \beta_0 \mathfrak{X}_{01} + \beta_2 \mathfrak{X}_{02} - \beta_3 \mathfrak{X}_{03} \\ &\quad + \alpha_1 \mathfrak{X}_{123} + \alpha_0 \mathfrak{X}_{23} + \alpha_2 \mathfrak{X}_{31} - \alpha_3 \mathfrak{X}_{12}, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Es sind das mit andern Worten die Formeln für die Bewegung (α, β) in Somenkoordinaten, wenn man, wie üblich \mathfrak{Y} durch \mathfrak{X}' ersetzt. Bemerkenswert ist, daß hier die Bewegungsparameter *linear* auftreten. Diese Formeln sind *ganz bedeutend* einfacher, als sie bei Benutzung der in § 1 angeführten Bestimmungsstücke $(x, y, z; p_1, \dots, r_3)$ ausfallen. Endlich geben sie auch noch an, wie bei der Bewegung (α, β) die *uneigentlichen* Somen vertauscht werden; diese werden nur *dreigliedrig* transformiert; aus den Formeln (36) fallen dann die β heraus, insbesondere bleibt jedes uneigentliche Soma bei allen Schiebungen in Ruhe.

Nennen wir ein *linkseitiges* Soma \mathfrak{X}^l *uneigentlich* für

$$\mathfrak{X}_0^l = \mathfrak{X}_{01}^l = \mathfrak{X}_{02}^l = \mathfrak{X}_{03}^l = 0,$$

und sonst *eigentlich*, so gilt weiter:

^{*)} Abweichend von Cayley, der für zwei gerade Linien eine *irrational*e Simultaninvariante so nennt.

Das *eigentliche rechtseitige Soma* \mathcal{Y} , welches aus dem *eigentlichen linkseitigen Soma* \mathcal{X}^I durch die *Umlegung* (γ, δ) hervorgeht, heißt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_0 &= \gamma_0 \mathcal{X}_0^I - \gamma_1 \mathcal{X}_{01}^I - \gamma_2 \mathcal{X}_{02}^I - \gamma_3 \mathcal{X}_{03}^I, \\
 \mathcal{Y}_{01} &= \gamma_1 \mathcal{X}_0^I + \gamma_0 \mathcal{X}_{01}^I + \gamma_3 \mathcal{X}_{02}^I - \gamma_2 \mathcal{X}_{03}^I, \dots \\
 \mathcal{Y}_{123} &= -\delta_0 \mathcal{X}_0^I + \delta_1 \mathcal{X}_{01}^I + \delta_2 \mathcal{X}_{02}^I + \delta_3 \mathcal{X}_{03}^I \\
 &\quad + \gamma_0 \mathcal{X}_{123}^I - \gamma_1 \mathcal{X}_{23}^I - \gamma_2 \mathcal{X}_{31}^I - \gamma_3 \mathcal{X}_{12}^I, \\
 \mathcal{Y}_{23} &= -\delta_1 \mathcal{X}_0^I - \delta_0 \mathcal{X}_{01}^I - \delta_3 \mathcal{X}_{02}^I + \delta_2 \mathcal{X}_{03}^I \\
 &\quad + \gamma_1 \mathcal{X}_{123}^I + \gamma_0 \mathcal{X}_{23}^I + \gamma_3 \mathcal{X}_{31}^I - \gamma_2 \mathcal{X}_{12}^I, \dots
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Auch diese Formeln lassen sich bequemer beim Gebrauch von Biquaternionen schreiben; bei jeder Anwendung braucht man aber fertige Formeln. Es gibt noch zwei ähnlich gebaute Formelsysteme, die wir nicht benötigen; sie sind leicht herzustellen auf Grund der beiden Bemerkungen:

Die Inverse der Bewegung (α, β) hat die Parameter

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \quad \beta_0 : -\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3.
 \tag{38}$$

Die Inverse der Umlegung (γ, δ) hat die Parameter

$$\gamma_0 : -\gamma_1 : -\gamma_2 : -\gamma_3 : \quad -\delta_0 : \delta_1 : \delta_2 : \delta_3.
 \tag{39}$$

Schließlich ergeben sich Mittelpunkt und Achsenrichtungen des linkseitigen Soma, wenn man links in (4) und (5) überall Minuszeichen einführt.

5. Wir wollen jetzt das bis dahin nur rein formal erklärte *uneigentliche* (rechtseitige) Soma der Anschauung nahebringen. Dazu gehen wir analog vor, wie in der Liniengeometrie, wo man eine uneigentliche Gerade ersetzt durch die Gesamtheit der eigentlichen Geraden, die zu ihr inzident sind.

Wir betrachten also ein uneigentliches Soma

$$0 : 0 : 0 : 0 : \quad \mathcal{M}_{123} : \mathcal{M}_{23} : \mathcal{M}_{31} : \mathcal{M}_{12}
 \tag{40}$$

und suchen alle ∞^5 *eigentlichen* Somen \mathcal{X} , die zu ihm inzident sind. Die Bedingung dafür, $(\mathcal{M}\mathcal{X}) = 0$, reduziert sich auf

$$\mathcal{M}_{123}\mathcal{X}_0 + \mathcal{M}_{23}\mathcal{X}_{01} + \mathcal{M}_{31}\mathcal{X}_{02} + \mathcal{M}_{12}\mathcal{X}_{03} = 0.$$

Durch Vergleichung mit (34) und der ersten Formel (29) findet man, daß alle diese Somen \mathcal{X} *orthogonal* sind zum *eigentlichen Soma*

$$(\mathcal{M}_{123} : \mathcal{M}_{23} : \mathcal{M}_{31} : \mathcal{M}_{12} : \quad 0 : 0 : 0 : 0
 \tag{41}$$

und ebenso zu den ∞^3 Somen, die zum letztgenannten Soma (41) parallel sind.

Aus irgendeinem dieser ∞^3 eigentlichen Somen gehen durch die ∞^5 *Umschraubungen* die ∞^5 Somen \mathcal{X} hervor, die zum *uneigentlichen Soma* (40) inzident sind.

Die genannten zum Soma (41) parallelen Somen bestimmen daher das uneigentliche Soma (40) eindeutig. Sie bestimmen andererseits drei *orientierte* Richtungen (die, zu denen ihre Achsen syntaktisch sind). Deren Richtungskosinus sind aber für die erste Achse

$$(42) \cos \lambda_1 = \frac{\mathfrak{A}_{122}^2 + \mathfrak{A}_{222}^2 - \mathfrak{A}_{311}^2 - \mathfrak{A}_{112}^2}{\mathfrak{A}_{122}^2 + \mathfrak{A}_{222}^2 + \mathfrak{A}_{311}^2 + \mathfrak{A}_{112}^2}, \quad \cos \mu_1 = \frac{2(\mathfrak{A}_{222}\mathfrak{A}_{311} - \mathfrak{A}_{122}\mathfrak{A}_{112})}{\mathfrak{A}_{122}^2 + \mathfrak{A}_{222}^2 + \mathfrak{A}_{311}^2 + \mathfrak{A}_{112}^2}, \quad \cos \nu_1 = \frac{2(\mathfrak{A}_{222}\mathfrak{A}_{112} + \mathfrak{A}_{122}\mathfrak{A}_{311})}{\mathfrak{A}_{122}^2 + \mathfrak{A}_{222}^2 + \mathfrak{A}_{311}^2 + \mathfrak{A}_{112}^2}$$

Durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 gehen hervor aus $\cos \lambda_1: \cos \mu_1$ und $\cos \nu_1$, aus $\cos \mu_1: \cos \nu_1$ und $\cos \lambda_1$, aus $\cos \nu_1: \cos \lambda_1$ und $\cos \mu_1$, wenn man vereinbart $\mathfrak{X}_{122} = \mathfrak{X}_{311} = \mathfrak{X}_{112}$.

Die Figur dieser drei orientierten Richtungen liefert jetzt eine anschauliche Vorstellung vom uneigentlichen Soma. Will man in der Liniengeometrie völlig analog vorgehen, so hat man dort eine uneigentliche Gerade nicht durch das zugehörige Parallelebenenbüschel zu ersetzen, sondern muß von diesem noch zu dem normalen Parallelgeradenbündel übergehen. —

Nachdem wir jetzt mit dem Soma in allen Fällen eine hinreichend klare Vorstellung zu verbinden gelernt haben, kehren wir zu Satz 1 zurück, der uns zeigte, daß die Somen auf die Punkte einer M_6^2 abgebildet werden können. Aus der Algebra der quadratischen Formen entnehmen wir nämlich den Satz, daß die Punkte der M_6^2 auf allgemeinste Weise untereinander vertauscht werden durch die Projektivitäten einer achtundzwanzigliedrigen Gruppe des R_7 . Diese wollen wir schon jetzt der Kürze halber mit (G_{28}, H_{28}) bezeichnen, und ebenso die zu ihr holomorphe Gruppe von Somentransformationen. Daß sie (*wenigstens*) aus zwei getrennten Transformationscharen besteht, wird in § 10 gezeigt, im übrigen stellen wir die Struktur der Gruppe noch zurück.

Damit ist eine Forschungsmethode im Sinne von Kleins Erlanger Programm geliefert. Die (G_{28}, H_{28}) spielt aber in der Kinematik dieselbe Rolle, wie in der Liniengeometrie die Gruppe (G_{15}, H_{15}) der Kollineationen und Korrelationen.

In der Geometrie der Gruppe (G_{28}, H_{28}) ist der Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Somen unwesentlich. Ein solcher Unterschied tritt erst zutage in der Geometrie einer zweiundzwanzigliedrigen (Beweis in § 10) Untergruppe G_{22} von G_{28} , die also in Parallele zu den Affinitäten gesetzt werden kann.

Es ist nun bequem, nur die Erscheinungen zu behandeln, die gegenüber Transformationen von (G_{28}, H_{28}) invarianten Charakter haben, und so gelangt man auch zu den einfachsten, allgemeinen Gesetzen. Indessen ist der Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Somen doch zu tiefgreifend, um ihn bei einer ersten Einführung in den Gegenstand

völlig außer acht zu lassen. Wir werden daher beim Studium der *linearen Somenmannigfaltigkeiten*, zu dem wir nunmehr übergehen, sogleich auch die Klassifikation gegenüber G_{22} bringen, die im engsten Zusammenhang mit der kinematischen Erzeugung dieser Gebilde steht, und eine größere Anschaulichkeit in die z. T. bereits verwickelten Verhältnisse bringt.

6. Aus zwei *getrennten inzidenten* (rechtseitigen) Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bilden wir das *Somenbüschel*

$$(43) \quad \mathfrak{X} = \sigma_1 \mathfrak{A} + \sigma_2 \mathfrak{B}.$$

Inzident müssen die beiden Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sein, weil sonst für \mathfrak{X} die Relation (2) nicht erfüllt wird. Es soll also sein $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) = 0$. Dann gilt aber

Satz 2. *Jedes Soma eines Somenbüschels ist zu jedem andern solchen Soma inzident.* Sei nämlich $\mathfrak{Y} = \tau_1 \mathfrak{A} + \tau_2 \mathfrak{B}$ ein anderes Soma des Büschels ($\sigma_1 \tau_2 - \sigma_2 \tau_1 \neq 0$), so ist

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \sigma_1 \tau_1 (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) + (\sigma_1 \tau_2 + \sigma_2 \tau_1) (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \sigma_2 \tau_2 (\mathfrak{B}\mathfrak{B}) = 0.$$

Satz 3. *Die Somenbüschel sind den erzeugenden R_1 (geraden Linien) auf M_6^2 zugeordnet.*

Eine leichte Konstantenabzählung, die wir hier durchführen wollen, zeigt, daß es ∞^0 Somenbüschel gibt. Der Punkt \mathfrak{A} der M_6^2 kann auf ∞^6 Arten gewählt werden, der Punkt \mathfrak{B} aber wegen $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$ nur noch auf ∞^5 Arten. Es gibt also ∞^{11} brauchbare Punktepaare auf M_6^2 . Jeder Erzeugenden von M_6^2 gehören aber ∞^3 solcher Paare zu. Daher gibt es nur ∞^8 solche Erzeugende, also ∞^0 Somenbüschel. Ebenso zeigt man:

Durch jedes Soma laufen ∞^4 Somenbüschel.

Die ∞^0 Somenbüschel bilden eine einzige Klasse gegenüber Transformationen von (G_{22}, H_{22}) , d. i. jedes Somenbüschel kann in jedes andere transformiert werden. Die Eigenschaften des Somenbüschels können daher an einem speziellen Somenbüschel studiert werden, etwa am Büschel:

$$0 : \sigma_1 : \sigma_2 : 0 : \quad 0 : 0 : 0 : 0.$$

Anders verhält es sich aber gegenüber Transformationen von G_{22} , wo der Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Somen wesentlich wird. Dort haben wir *drei* Klassen zu unterscheiden.

a) *Somenbüschel, die nur aus eigentlichen Somen bestehen.* Keine zwei Somen im Büschel sind parallel. Als „kanonisches“ Beispiel wählen wir

$$(44) \quad \sigma_1 : \sigma_2 : 0 : 0 : \quad 0 : 0 : 0 : 0.$$

Man erzeugt ein solches Somenbüschel kinematisch, indem man irgend eins seiner Somen *allen Drehungen um eine feste Achse* unterwirft (im

Beispiel (etwa) das Protosoma allen Drehungen um seine erste Achse).
Oder:

Man spiegelt ein *linkseitiges* Soma an *allen Ebenen eines Büschels mit eigentlicher Achse* (im Beispiel etwa das linkseitige Soma

$$0:0:1:0: \quad 0:0:0:0$$

an allen Ebenen durch die *X*-Achse). Beweise durch (36) und (37).

b) *Somenbüschel mit einem einzigen uneigentlichen Soma*. Dann sind alle Somen des Büschels zueinander parallel. Solcher Somenbüschel gibt es ∞^7 , durch jedes eigentliche Soma ∞^2 , durch jedes uneigentliche ∞^4 .
Beispiel:

$$(45) \quad \alpha_1:0:0:0: \quad 0:\alpha_2:0:0.$$

Die *eigentlichen* Somen eines solchen Büschels gewinnt man, wenn man ein *rechtseitiges* Soma *allen Schiebungen in einer festen Richtung* unterwirft (im Beispiel (etwa) das Protosoma in der Richtung der *X*-Achse, vgl. (14)), oder wenn man ein *linkseitiges* Soma *an den Ebenen eines Parallelebenenbüschels spiegelt* (im Beispiel das linkseitige Soma

$$0:1:0:0: \quad 0:0:0:0$$

an allen Ebenen senkrecht zur *X*-Achse).

Man könnte versucht sein, zu meinen, das uneigentliche Soma in einem solchen Büschel werde durch die gemeinsamen Achsenrichtungen seiner ∞^1 parallelen eigentlichen Somen geliefert. Vielmehr hat man diese Achsenrichtungen noch der *Umwendung* um eine der Schiebungsrichtung parallele Gerade zu unterwerfen. Damit ist auch das uneigentliche Soma im Büschel konstruiert.

c) *Das Somenbüschel besteht ganz aus uneigentlichen Somen*. Solcher Büschel gibt es ∞^4 , durch jedes (uneigentliche) Soma ∞^2 . Man unterwirft ein (rechtseitiges) uneigentliches Soma etwa *allen Drehungen um eine Gerade*, die innerhalb des durch sie bestimmten Parallelenbündels beliebig gewählt werden kann. Durch Abänderung dieses Parallelenbündels können alle Somenbüschel durch das Ausgangssoma gewonnen werden. Oder man übt auf ein linkseitiges uneigentliches Soma *alle Umlegungen von festem Mittelpunkt und fester Mittelebene* aus. Beispiel:

$$(46) \quad 0:0:0:0: \quad 0:\alpha_1:\alpha_2:0.$$

7. Die drei rechtseitigen Somen \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} sollen keinem Somenbüschel angehören, aber zu zweien inzident sein. Unter dieser Voraussetzung stellt das System

$$(47) \quad \mathfrak{X} = \sigma_1 \mathfrak{A} + \sigma_2 \mathfrak{B} + \sigma_3 \mathfrak{C}$$

eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Somen dar, ein *Somenbündel*.

Satz 4. *Jedes Soma eines Somenbündels ist zu jedem andern solchen Soma inzident.* Beweis wie bei Satz 2.

Satz 5. *Die Somenbündel sind den erzeugenden R_3 (Ebenen) auf M_6^2 zugeordnet.* Es gibt ∞^0 Somenbündel, durch jedes Soma ∞^8 , durch jedes Somenbüschel ∞^3 . Ein Somenbündel enthält ∞^2 Somenbüschel, von denen zwei getrennte stets ein einziges Soma gemeinsam haben. Doch brauchen zwei Somenbüschel, die ein Soma gemeinsam haben, nicht einem Somenbündel anzugehören. Irgend zwei getrennte Somen des Bündels können stets durch ein einziges Somenbüschel verbunden werden, welches ganz im Bündel liegt. Zwei getrennte Somenbündel können ein Soma oder ein Somenbüschel gemeinsam haben; es ist aber auch der Fall denkbar, daß sie völlig windschief zueinander verlaufen. Die ∞^0 Somenbündel bilden eine einzige Klasse gegenüber (G_{28}, H_{28}) .

Jetzt achten wir wieder auf die uneigentlichen Somen, klassifizieren also gegenüber G_{22} und geben kinematische Erzeugungen für die einzelnen Typen an.

a) *Sämtliche Somen des Somenbündels sind eigentlich.* Dann sind keine zwei Somen im Bündel parallel; es gibt nur Somenbüschel vom Typus a. Man führt auf ein rechtseitiges Soma *alle Drehungen um die geraden Linien eines Büschels mit eigentlichem Scheitel* aus, oder spiegelt ein linkseitiges Soma *an allen Ebenen durch einen eigentlichen Punkt*. Beispiel:

$$(48) \quad 0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \quad 0 : 0 : 0 : 0.$$

b) *Somenbündel mit einem einzigen uneigentlichen Soma.* Deren gibt es ∞^8 , durch jedes eigentliche Soma ∞^4 , durch jedes uneigentliche ∞^6 . Die Somen eines solchen Bündels lassen sich auf ∞^1 Somenbüschel vom Typus b verteilen; alle übrigen Somenbüschel der Figur gehören dem Typus a an. Man führt auf ein rechtseitiges Soma *alle Drehungen um die geraden Linien eines Parallelenbüschels* aus oder spiegelt ein linkseitiges Soma *an allen Ebenen eines Bündels von uneigentlichem Scheitel*. Dann ist noch das uneigentliche Soma hinzuzufügen (vgl. § 6, Typus b). Beispiel:

$$(49) \quad 0 : 0 : \sigma_2 : \sigma_3 : \quad 0 : \sigma_1 : 0 : 0.$$

c) *Das Somenbündel enthält ein Büschel uneigentlicher Somen.* Solcher Bündel gibt es ∞^6 , durch jedes eigentliche Soma ∞^3 , durch jedes uneigentliche ∞^4 . Alle Somen der Figur sind zueinander parallel; Somenbüschel vom Typus a treten nicht mehr auf. Man unterwirft ein rechtseitiges Soma *allen Schiebungen parallel zu einer Ebene* oder spiegelt

ein linkseitiges Soma an allen Punkten einer Ebene. Jede eingliedrige Schiebungsgruppe bestimmt ein uneigentliches Soma. Beispiel:

$$(50) \quad 0 : \sigma_1 : 0 : 0 : \quad 0 : 0 : \sigma_2 : \sigma_3.$$

d) Das Somenbündel enthält nur uneigentliche Somen. Bündel dieser Art gibt es noch ∞^3 , durch jedes (uneigentliche) Soma ∞^2 . Man übt auf ein uneigentliches rechtseitiges Soma alle Drehungen um die Geraden eines Büschels mit eigentlichem Scheitel aus oder führt auf ein linkseitiges uneigentliches Soma die unter a) beschriebenen Umlegungen aus. Beispiel:

$$(51) \quad 0 : 0 : 0 : 0 : \quad 0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3.$$

8. Die vier rechtsseitigen Somen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sollen keinem Somenbündel angehören, aber zu zweien inzident sein. Dann stellt das System

$$(52) \quad \mathcal{X} = \sigma_0 \mathcal{A} + \sigma_1 \mathcal{B} + \sigma_2 \mathcal{C} + \sigma_3 \mathcal{D}$$

eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Somen dar, ein *Somengebüsch*.

Satz 6. Jedes Soma eines Somengebüsches ist zu jedem anderen Soma inzident.

Satz 7. Die Somengebüsches sind zugeordnet den erzeugenden dreidimensionalen Räumen R_3 auf M_3^2 .

Daher gibt es im Somengebüsch ∞^3 Somenbündel, von denen zwei getrennte sich in einem Somenbüschel durchsetzen, ferner ∞^4 Somenbündel. Haben zwei getrennte von diesen ein Soma gemeinsam, so können sie auch durch ein Somenbündel verbunden werden, welches ganz im Gebüsch enthalten ist. Drei Somenbündel im Gebüsch haben mindestens ein Soma gemeinsam. Durch ein Soma des Gebüsches gibt es ∞^2 Somenbüschel und ebensoviel Somenbündel, die ganz im Gebüsch verlaufen. Durch ein Somenbüschel des Gebüsches lassen sich ∞^1 Somenbündel legen, die dem Gebüsch angehören.

a) *Somengebüsches ohne uneigentliches Soma*. Deren gibt es ∞^6 , durch jedes Soma ∞^3 . Keine zwei Somen im Gebüsch sind zueinander parallel. Man unterwirft ein rechtseitiges Soma allen Drehungen um einen festen Punkt oder ein linkseitiges Soma allen Umlegungen mit festem eigentlichem Mittelpunkt.

$$(53) \quad \sigma_0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \quad 0 : 0 : 0 : 0.$$

b) *Ein einziges uneigentliches Soma*. Solcher Somengebüsches gibt es ebenfalls noch ∞^6 , durch jedes Soma ∞^2 . Die Somen der Figur lassen sich auf ∞^2 Büschel paralleler Somen verteilen. Man führt auf ein recht-

seitiges Soma *alle Drehungen um die Geraden einer Ebene aus* oder auf ein linkseitiges Soma die Spiegelungen *an allen Ebenen des Raumes*.

$$(54) \quad \sigma_0:0:\sigma_2:\sigma_3: \quad 0:\sigma_1:0:0.$$

c) *Ein Büschel uneigentlicher Somen*. Solcher Somengebüsche gibt es noch ∞^5 , durch jedes eigentliche Soma ∞^2 , durch jedes uneigentliche ∞^3 . Die eigentlichen Somen der Figur lassen sich auf ∞^1 Bündel paralleler Somen verteilen. Ein rechtseitiges Soma wird *allen Drehungen um die Geraden eines Parallelenbündels* unterworfen; ein linkseitiges *allen Umlegungen mit festem uneigentlichen Mittelpunkt*. Hierdurch erweist sich dieser Fall als Ausartung des Typus a.

$$(55) \quad \sigma_0:\sigma_1:0:0: \quad 0:0:\sigma_2:\sigma_3.$$

d) *Ein Bündel uneigentlicher Somen*. Es gibt ∞^3 solcher Somengebüsche, durch jedes eigentliche Soma ein einziges, durch jedes uneigentliche ∞^1 . Alle Somen der Figur sind zueinander parallel. Man unterwirft ein rechtseitiges Soma *allen Schiebungen* (Ausartung von Typus b)), oder ein linkseitiges den Spiegelungen *an allen Punkten des Raumes*.

$$(56) \quad \sigma_0:0:0:0: \quad 0:\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3.$$

e) *Das Gebüsch aller uneigentlichen Somen*.

$$(57) \quad 0:0:0:0: \quad \sigma_0:\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3.$$

Damit sind alle linearen Somenmannigfaltigkeiten aufgezählt. Gäbe es nämlich auf M_6^2 noch erzeugende R_4 , so müßten sie, wie die Konstantenabzählung sofort ergibt, in diskreter Anzahl vorhanden sein; M_6^2 ist aber singularitätenfrei.

Die Kriterien für die Klassifikation gegenüber G_{22} werden durch die Rangzahlen der drei Matrizes geliefert

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ B_0 & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ C_0 & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ D_0 & D_{01} & D_{02} & D_{03} \end{vmatrix},$$

wobei für die Somenbündel die letzte Reihe, für die Somenbüschel die beiden letzten Reihen zu unterdrücken sind.

Zur Konstruktion der einzelnen Figuren durch *Bewegungen* haben wir jedesmal ein Soma benutzt, welches der Mannigfaltigkeit bereits angehörte. Dadurch bilden die fraglichen Bewegungsscharen, die hier immer nur aus Drehungen und Schiebungen, d. i. nicht aus Schraubungen bestehen, jedesmal eine *kontinuierliche Gruppe*. Sonst hätten sich auch andere Konstruktionen angeben lassen; bei den Somenbüscheln und Somen-

bündeln kommt man mit *Umwendungen* aus. Die Umwendungsachsen erfüllen ein Geradenbüschel mit eigentlichem Scheitel (Somenbüschel, Typus a), ein Parallelenbüschel (Typus b); ein Geradenbündel mit eigentlichem Scheitel (Somenbündel, Typus a), ein ebenes Geradenfeld (Typus b), oder endlich ein Parallelenbündel (Typus c). Die Somengebüsche können nicht so erhalten werden, da es kein Soma gibt, welches vier linear unabhängige Somen gleichzeitig senkrecht schneidet.

Die kanonischen Beispiele sind bei allen nicht ganz aus uneigentlichen Somen bestehenden Büscheln und Gebüschen so gewählt, daß sie das Protosoma enthalten. Das ist natürlich nicht notwendig, darum haben wir bei den Somenbündeln absichtlich andere Beispiele angegeben.

Der Umstand, daß es zwei Typen von Somengebüschen von gleicher Konstantenzahl sechs gibt, fordert zu weiteren Untersuchungen auf, zu denen wir andere Mittel benötigen⁹⁾.

9. Die Figur des Soma, also dreier sich senkrecht schneidenden Speere ist immerhin recht verwickelt, und es erweist sich wünschenswert eine klarere Vorstellung der betrachteten Somenmannigfaltigkeiten, die der Anschauung gewiß Schwierigkeiten bereiten, auf andern Wege zu gewinnen.

Eine einfachere Figur, die ebenfalls in ∞^6 Exemplaren vorkommt, ist der *komplexe Punkt des dreidimensionalen Raumes*. Er sei eigentlich und habe die inhomogenen Koordinaten X_1, X_2, X_3 ; der konjugiert imaginäre Punkt werde als $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ bezeichnet. Dann setzen wir

$$(58) \quad \mathfrak{X}_0 = 1, \quad \mathfrak{X}_{01} = \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + X_1), \dots$$

$$\mathfrak{X}_{123} = \frac{1}{4}i\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - \bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2\}, \quad \mathfrak{X}_{23} = \frac{1}{2}i(\bar{X}_1 - X_1), \dots$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{X}_{01}, \dots, \mathfrak{X}_{23}, \dots$ liegen nahe¹⁰⁾, der für \mathfrak{X}_{123} folgt aus (2).

Hiernach ist jedem *eigentlichen komplexen* Punkte zugeordnet ein (*reelles*) *eigentliches* Soma, und auch das Umgekehrte gilt, *wenn nicht* $\mathfrak{X}_0 = 0$ ist. Gehören so die Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} zu den Punkten X und Y , so wird

$$(59) \quad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \frac{1}{4}i\{(X_1 - Y_1)^2 + \dots - (\bar{X}_1 - \bar{Y}_1)^2 - \dots\}.$$

Hieraus folgt sofort:

⁹⁾ Einen Teil der bisher vorgeführten Ergebnisse hat Herr de Saussure gefunden (Exposé résumé de la géométrie des feuilletés. Genf 1910). Feuillet ist im wesentlichen identisch mit dem *eigentlichen* Soma; der Unterschied zwischen rechtseitigen und linksseitigen Somen, die beide auftreten, kommt nicht klar zutage. Herr de Saussure nennt das Somenbüschel vom Typus a *Couronne*, das Somenbündel vom Typus a *couronoïde*, das Somengebüsch vom Typus b *hypercouronoïde*. Die übrigen neun Typen linearer Somenmannigfaltigkeiten sind ihm entgangen, insbesondere das *hochwichtige* Somengebüsch vom Typus a (Linksgebüsch, vgl. § 10).

¹⁰⁾ Vgl. etwa: Study, Ebene analytische Kurven. Leipzig 1911. S. 21.

Satz 8. *Inzidente Somen bilden sich ab als komplexe Punkte, deren Abstandsquadrat reell ist.*

Danach erweist sich als Bild eines Somenbüschels der reelle Zug einer reellen Geraden, als Bild eines Somenbündels der reelle Zug einer reellen Ebene, endlich haben wir in der Gesamtheit aller reellen Punkte des Raumes ein Bild für ein Somengebüsch. Das sind aber die Bilder von nur ∞^4 Büscheln, ∞^3 Bündeln und einem einzigen Gebüsch; die übrigen linearen Somenmannigfaltigkeiten bilden sich hier ebenso wie bei zwei anderen Zuordnungen von reellen Somen zu komplexen Punkten als *imaginäre* Punktgebilde ab.

Nun liegen aber bereits Untersuchungen vor, die den komplexen Punkt des Raumes durch eine reelle Figur ersetzen, durch die eines reellen orientierten Kreises (Laguerre), oder die *zweier geordneter reeller Punkte*¹¹⁾, und diese letzte erweist sich als für uns brauchbar. Das Paar eigentlicher reeller Punkte $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$ (inhomogene Koordinaten) soll zum komplexen Punkt X in folgende Beziehung gesetzt werden:

$$(60) \quad x_1 + x'_1 = \bar{X}_1 + X_1, \dots, x_i - x'_i = i(\bar{X}_i - X_i), \dots$$

(abweichend von Graustein). Dadurch wird infolge von (58)

$$(61) \quad \begin{aligned} \bar{X}_0 &= 1, \quad \bar{X}_{01} = \frac{1}{2}(x_1 + x'_1), \dots \\ \bar{X}_{123} &= \frac{1}{4}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad \bar{X}_{23} = \frac{1}{2}(x_1 - x'_1), \dots \end{aligned}$$

Die Umkehrungsformeln lauten

$$(62) \quad x_1 = \bar{X}_{01} + \bar{X}_{23} : \bar{X}_0, \dots, x'_1 = \bar{X}_{01} - \bar{X}_{23} : \bar{X}_0, \dots$$

Hierdurch wird jedem Paare geordneter reeller eigentlichen Punkte des Raumes eindeutig ein Soma zugeordnet, und umgekehrt, solange nicht \bar{X}_0 verschwindet.

Die letzte Einschränkung läßt sich heben (§ 11); an dieser Stelle verzichten wir darauf, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen.

Gehört das Soma \mathcal{Y} zum Punktepaar $y \rightarrow y'$, so wird

$$(63) \quad (\mathcal{Y}) = \frac{1}{4}\{(y'_1 - x'_1)^2 + \dots - (y_1 - x_1)^2 - \dots\}.$$

Sind also die beiden Somen \mathcal{X} und \mathcal{Y} inzident, so haben die beiden „Anfangspunkte“ x und y dasselbe Entfernungsquadrat wie die beiden „Endpunkte“ x' und y' : die beiden Punktepaare heißen dann *isometrisch*:

Satz 9. *Inzidenten Somen können zugeordnet werden isometrische Punktepaare.* Damit erweist sich die Abbildung für die Geometrie der (G_{23}, H_{23}) brauchbar.

¹¹⁾ W. C. Graustein, Eine reelle Abbildung analytischer komplexer Raumkurven. Diss. Bonn 1913.

10. Den linearen Somenmannigfaltigkeiten entsprechen jetzt, wenn nicht für alle ihre Somen $\mathfrak{X}_0 = 0$ ist, höchst anschauliche Figuren. Die ∞^1 zu einem *Somenbüschel* gehörigen Punktepaare haben ihre Anfangspunkte auf einer Geraden, und ebenso ihre Endpunkte auf einer Geraden (die mit der ersten zusammenfallen kann); beide Geraden sind durch die ∞^1 Punktepaare isometrisch (kongruent) aufeinander bezogen.

Ebenso einfach wird das Bild eines *Somenbündels*. Die Anfangspunkte der ∞^2 Punktepaare erfüllen eine Ebene, ebenso die Endpunkte. Beide Ebenen, die zusammenfallen können, sind durch die Punktepaare isometrisch (kongruent) aufeinander abgebildet.

Hieraus liest man ohne weiteres die Konstantenzahlen und eine ganze Reihe von Eigenschaften der Figuren ab.

Etwas anders verhalten sich die Bilder der *Somengebüsch*. Einem solchen entspricht zwar wieder eine isometrische Zuordnung, diesmal des Raumes auf sich selbst, sie kann aber diesmal auf zwei wesentlich verschiedene Arten hervorgerufen werden, nämlich durch eine *Bewegung* oder eine *Umlegung*. Demgemäß gibt es zwei verschiedene Arten von Somengebüsch, die wir als *Linksgebüsch* und *Rechtsgebüsch* unterscheiden wollen. Von den aufgestellten Typen a) bis d) in § 8 sind a) und c) Linksgebüsch, b) und d) Rechtsgebüsch. Z. B. folgt aus (55) infolge (62)

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma_1 : \sigma_0, & x_2 &= \sigma_2 : \sigma_0, & x_3 &= \sigma_3 : \sigma_0; \\ x'_1 &= \sigma_1 : \sigma_0, & x'_2 &= -\sigma_2 : \sigma_0, & x'_3 &= -\sigma_3 : \sigma_0. \end{aligned}$$

Es liegt also ($x'_1 = x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = -x_3$) die Umwendung um die X -Achse, mithin eine Bewegung vor.

Um ein Kriterium dafür zu haben, wann das Somengebüsch (52) Linksgebüsch ist, vergleichen wir die Volumina zugeordneter Tetraeder und finden

Linksgebüsch (Bewegungen):

$$(64a) \quad |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{23} \mathfrak{C}_{31} \mathfrak{D}_{12}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{02} \mathfrak{C}_{03} \mathfrak{D}_{23}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{03} \mathfrak{C}_{01} \mathfrak{D}_{31}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{01} \mathfrak{C}_{02} \mathfrak{D}_{12}| = 0.$$

Rechtsgebüsch (Umlegungen):

$$(64b) \quad |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{01} \mathfrak{C}_{02} \mathfrak{D}_{03}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{31} \mathfrak{C}_{12} \mathfrak{D}_{01}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{12} \mathfrak{C}_{23} \mathfrak{D}_{02}| + |\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_{23} \mathfrak{C}_{31} \mathfrak{D}_{03}| = 0.$$

Daraus folgt sofort, daß die Somentransformation

$$(65) \quad \mathfrak{X}'_0 = \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{23}, \dots, \mathfrak{X}'_{123} = \mathfrak{X}_{123}, \mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{01}, \dots$$

jedes *Linksgebüsch* in ein *Rechtsgebüsch* verwandelt, und umgekehrt. Damit ist ein erster Aufschluß über die Struktur der achtundzwanzigliedrigen Gruppe von Somentransformationen (§ 5) gewonnen. Sie zerfällt in zwei getrennte Transformationsscharen, von denen die der ersten Schar („ G_{28} “) Linksgebüsch immer wieder in Linksgebüsch, Rechtsgebüsch immer

wieder in Rechtsgebüsche überführen. Diese Transformationen bilden für sich eine Gruppe. Die Transformationen der andern Schar („ H_{23} “) vertauschen beide Arten von Somengebüschen. Keine der beiden Scharen bildet übrigens ein Kontinuum, wie wir hier vorläufig bemerken, sondern jede zerfällt noch wieder in vier getrennte Kontinua.

Das Analogon zu den Transformationen von G_{23} im Linienraum sind die *Kollineationen*, zu H_{23} die *Korrelationen*. Den Linksgebüschen entsprechen dort nämlich (vgl. 66a) die Geradenbündel (linkseitige erzeugende R_2 auf M_1^3), den Rechtsgebüschen die Geradenfelder (rechtseitige erzeugende R_2 auf M_1^3). Wir ergänzen daher Satz 7 dahin:

Satz 10. *Den Linksgebüschen sind zugeordnet die „linkseitigen“ erzeugenden R_2 auf M_1^3 , den Rechtsgebüschen die „rechtseitigen“ erzeugenden R_2 .*

Die Analogie ist aber nicht durchgreifend, die Gruppe (G_{15} , H_{15}) der Projektivitäten des Linienraums umfaßt nur vier getrennte Kontinua von Transformationen. Acht getrennte Scharen erhält man wieder, wenn man noch zwei Dimensionen weiter zurückgeht, in der Gruppe einer reellen geradlinigen singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung¹³⁾. Hierzu beachte man die Bemerkung vom Schlusse des § 1. —

Ein Punkt x kann in einen Punkt x' durch ∞^3 Bewegungen und durch ∞^3 Umlegungen überführt werden. Man kann nämlich in den Gleichungen (7) bis (10) zunächst die α beliebig variieren (vgl. aber (9)!) und daraus die β eindeutig bestimmen:

$$\begin{aligned} 2\beta_0 &= * & - (x_1 - x'_1)\alpha_1 - (x_2 - x'_2)\alpha_2 - (x_3 - x'_3)\alpha_3, \\ (66) \quad 2\beta_1 &= (x_1 - x'_1)\alpha_0 & * & - (x_2 + x'_2)\alpha_3 + (x_3 + x'_3)\alpha_3, \\ 2\beta_2 &= (x_2 - x'_2)\alpha_0 + (x_3 + x'_3)\alpha_1 & * & - (x_1 + x'_1)\alpha_3, \\ 2\beta_3 &= (x_3 - x'_3)\alpha_0 - (x_2 + x'_2)\alpha_1 + (x_1 + x'_1)\alpha_2 & * & . \end{aligned}$$

Ganz entsprechend findet man für die ∞^3 Umlegungen

$$\begin{aligned} 2\delta_0 &= * & - (x_1 + x'_1)\gamma_1 - (x_2 + x'_2)\gamma_2 - (x_3 + x'_3)\gamma_3, \\ (67) \quad 2\delta_1 &= (x_1 + x'_1)\gamma_0 & * & - (x_2 - x'_2)\gamma_3 + (x_3 - x'_3)\gamma_3, \\ 2\delta_2 &= (x_2 + x'_2)\gamma_0 + (x_3 - x'_3)\gamma_1 & * & - (x_1 - x'_1)\gamma_3, \\ 2\delta_3 &= (x_3 + x'_3)\gamma_0 - (x_2 - x'_2)\gamma_1 + (x_1 - x'_1)\gamma_2 & * & . \end{aligned}$$

Vermöge unserer Abbildung folgt daraus

Satz 11. *Durch ein Soma laufen ∞^3 Linksgebüsche und ∞^3 Rechtsgebüsche.*

Der Beweis ist nicht ausreichend für Somen der Eigenschaft $\mathfrak{X}_0 = 0$.

¹³⁾ Vgl. einen Aufsatz des Verf. Amer. Trans. 11 (1910), S. 418–420, 424–426.

Man hat dann aber nur noch zu zeigen, daß diese ∞^5 Somen keine invariante Teilmannigfaltigkeit bilden, und das sieht man bereits an der zu H_{20} gehörigen Transformation

$$\mathfrak{X}'_0 = \mathfrak{X}_{123}, \quad \mathfrak{X}'_{01} = \mathfrak{X}_{01}, \dots, \quad \mathfrak{X}'_{123} = \mathfrak{X}_0, \quad \mathfrak{X}'_{23} = \mathfrak{X}_{23}, \dots$$

Soll eine Bewegung (66) oder eine Umlegung (67) auch noch den Punkt y in y' überführen, so müssen die beiden Punktepaare $x \rightarrow x'$ und $y \rightarrow y'$ isometrisch sein. Bei festgehaltenem y gibt das noch ∞^2 zulässige Lagen für y' , oder:

Satz 12. *Durch ein Somenbüschel laufen ∞^1 Linksgebüsche und ∞^1 Rechtsgebüsche.*

Durch drei Paare $x \rightarrow x'$, $y \rightarrow y'$, $z \rightarrow z'$, die paarweise isometrisch sind, ist eine einzige Bewegung und eine einzige Umlegung bestimmt:

Satz 13. *Durch ein Somenbündel läuft ein einziges Linksgebüsch und ein einziges Rechtsgebüsch.*

Analogon in der Liniengeometrie: Durch jedes Geradenbüschel läuft ein einziges Geradenbündel und ein einziges Geradenfeld.

Die Sätze 11 bis 13 zeigen, daß es bei den Somenbüscheln und Somenbündeln nicht derartige Unterschiede gibt, wie zwischen den Linksgebüschen und Rechtsgebüschen.

Es gibt windschiefe Linksgebüsche [Rechtsgebüsche]. Ein Beispiel genügt

$$\begin{aligned} \sigma_0 : \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : & \quad 0 : 0 : 0 : 0, \\ \sigma_0 : \sigma_1 : 0 : 0 : & \quad \sigma_1 : -\sigma_0 : \sigma_2 : \sigma_3. \end{aligned}$$

Wir benutzen die Gelegenheit, die schwerfälligen Kriterien (64ab) durch einfachere zu ersetzen. Die Betrachtung der uneigentlichen Somen (§ 8) ergibt:

Das Somengebüsch

$$(52) \quad \mathfrak{X} = \sigma_0 \mathfrak{U} + \sigma_1 \mathfrak{V} + \sigma_2 \mathfrak{C} + \sigma_3 \mathfrak{D}$$

ist ein Rechtsgebüsch, wenn der Rang der Matrix

$$\|\mathfrak{U}_0 \mathfrak{V}_{01} \mathfrak{C}_{12} \mathfrak{D}_{03}\|$$

eine ungerade Zahl ist.

Das würde dazu führen, das Gebüsch aller uneigentlichen Somen als ein Linksgebüsch zu erklären, und in der Tat nötigen dazu die folgenden beiden Sätze. Darin wird dann wieder die Analogie mit der Liniengeometrie unterbrochen, wo die Gesamtheit aller uneigentlichen Geraden als ebenes Feld anzusehen ist, entsprechend einer rechtseitigen erzeugenden R_2 von M_4^3 .

Satz 14. Zwei Linksgebüsche [Rechtsgebüsche], die ein Soma gemeinsam haben, schneiden sich in einem Somenbüschel.

Für das gemeinsame Soma dürfen wir sogleich $\mathfrak{X}_0 \neq 0$ voraussetzen. Dann ist zu zeigen, daß, wenn zwei Bewegungen [Umlegungen] S und T gleichzeitig x in x' überführen, es noch ∞^1 andere Punkte gibt, die beidemal in gleicher Weise transformiert werden. Jeder solche Punkt ist dann Ruhepunkt einer Bewegung ST^{-1} , die nur eine Drehung sein kann, da sie bereits den Ruhepunkt x besitzt. Damit ist aber die Existenz von ∞^1 Ruhepunkten gewährleistet.

Man kann den Beweis auch direkt führen. Faßt man in (66) die α, β als gegeben auf und ersetzt die x, x' nach (62), so genügen die Koordinaten der Somen des Linksgebüsches, welches der Bewegung (α, β) zugeordnet ist, den vier Gleichungen

$$(66a) \quad \begin{aligned} \beta_0 \mathfrak{X}_0 + \alpha_1 \mathfrak{X}_{22} + \alpha_2 \mathfrak{X}_{31} + \alpha_3 \mathfrak{X}_{12} &= 0, \\ \beta_1 \mathfrak{X}_0 - \alpha_0 \mathfrak{X}_{22} + \alpha_2 \mathfrak{X}_{03} - \alpha_3 \mathfrak{X}_{02} &= 0, \\ \beta_2 \mathfrak{X}_0 - \alpha_0 \mathfrak{X}_{31} + \alpha_3 \mathfrak{X}_{01} - \alpha_1 \mathfrak{X}_{03} &= 0, \\ \beta_3 \mathfrak{X}_0 - \alpha_0 \mathfrak{X}_{12} + \alpha_1 \mathfrak{X}_{02} - \alpha_2 \mathfrak{X}_{01} &= 0. \end{aligned}$$

Unser Satz wird jetzt, soweit er sich auf Linksgebüsche bezieht, durch Betrachtung zweier solcher Gleichungssysteme bewiesen. Für Rechtsgebüsche benutzt man entsprechend (67):

Die Koordinaten der Somen des Rechtsgebüsches, welches der Umlegung (γ, δ) zugeordnet ist, genügen den Gleichungen

$$(67a) \quad \begin{aligned} \delta_0 \mathfrak{X}_0 + \gamma_1 \mathfrak{X}_{01} + \gamma_2 \mathfrak{X}_{02} + \gamma_3 \mathfrak{X}_{03} &= 0, \\ \delta_1 \mathfrak{X}_0 - \gamma_0 \mathfrak{X}_{01} + \gamma_2 \mathfrak{X}_{12} - \gamma_3 \mathfrak{X}_{31} &= 0, \\ \delta_2 \mathfrak{X}_0 - \gamma_0 \mathfrak{X}_{02} + \gamma_3 \mathfrak{X}_{23} - \gamma_1 \mathfrak{X}_{12} &= 0, \\ \delta_3 \mathfrak{X}_0 - \gamma_0 \mathfrak{X}_{03} + \gamma_1 \mathfrak{X}_{31} - \gamma_2 \mathfrak{X}_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Verkürzt man (§ 1), so drücken die vier Gleichungen (66a) die Bedingungen dafür aus, daß die gerade Linie \mathfrak{X} durch den Punkt $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ läuft. Damit ist einmal der behauptete Parallelismus von Linksgebüsch und Geradenbündeln dargetan, andererseits ist darin auch ein Beweis für die Zweckmäßigkeit der Bezeichnungsweise der Bewegungsparameter zu erblicken. Anstatt der hier benutzten, von Study eingeführten Parameter (α, β) sind nämlich in der Folge von anderen Autoren andere Zeichen verwandt:

| | | | | | | | | |
|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-----------|------------|------------|------------|
| Study: | α_0 | α_1 | α_2 | α_3 | β_0 | β_1 | β_2 | β_3 |
| Combébiac: | α_0 | $-\alpha_1$ | $-\alpha_2$ | $-\alpha_3$ | β_0 | $-\beta_1$ | $-\beta_2$ | $-\beta_3$ |
| Klein: | D | $-A$ | $-B$ | $-C$ | D' | $-A'$ | $-B'$ | $-C'$ |

$$\begin{array}{cccccccccccc} \text{Bricard:} & \lambda & \mu & \nu & \varrho & l & m & n & p^{(1)} \\ \text{Schoenflies}^{19)}: & -D & A & B & C & +\frac{1}{2}D_1 & \frac{1}{2}A_1 & \frac{1}{2}B_1 & \frac{1}{2}C_1 \end{array}$$

Praktisch völlig unbrauchbar ist die Bricardsche Bezeichnungsweise. Bei allen übrigen tritt eine Diskrepanz auf zwischen (66a) und dem entsprechenden Formelsystem der Liniengeometrie. Trotzdem haben wir sie hier zusammengestellt, um die Brücke zu den Arbeiten der genannten Autoren zu schlagen.

Verkürzt man das System (67a), so sagen die verkürzten Formeln *vereinigte Lage der geraden Linie \mathfrak{L} mit der Ebene $\gamma_0:\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3$* aus.

Satz 15. *Ein Linksgebüsch und ein Rechtsgebüsch schneiden sich in einem einzigen Soma, oder sie haben ein ganzes Somenbündel gemeinsam.*

In der Tat wird das System der acht Gleichungen (66a), (67a) stets durch das Soma befriedigt

$$\begin{aligned} 68) \quad \mathfrak{X}_0 &= \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3, & \mathfrak{X}_{01} &= \alpha_0\delta_1 - \alpha_1\delta_0 - \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2, \dots \\ \mathfrak{X}_{123} &= -(\beta_0\delta_0 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3), & \mathfrak{X}_{23} &= -(\beta_0\gamma_1 - \beta_1\gamma_0 - \alpha_2\delta_3 + \alpha_3\delta_2), \dots \end{aligned}$$

und es ist nur noch der Fall zu untersuchen, wo dieses Soma unbestimmt wird.

Wir bezeichnen die linken Seiten der Gleichungen in (66a) durch L_0, L_1, L_2, L_3 , die in (67a) durch R_0, R_1, R_2, R_3 . Ferner sei

$$\begin{aligned} -\gamma_1 L_0 + \gamma_0 L_1 - \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 &= P_1, \dots \\ -\alpha_1 R_0 + \alpha_0 R_1 - \gamma_2 L_2 + \gamma_3 L_3 &= Q_1, \dots \end{aligned}$$

Für $\gamma_0 \neq 0$ haben wir dann in $P_1 = P_2 = P_3 = R_1 = R_2 = R_3 = L_0 = 0$ ein dem ursprünglichen System äquivalentes. R_0 ist dann linear abhängig von R_1, R_2, R_3 . Aber $P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0$ sind jetzt identisch erfüllt, so daß zur Bestimmung von sieben Unbekannten vier unabhängige homogene Gleichungen übrig sind.

Für $\gamma_0 = 0, \alpha_0 \neq 0$ nehmen wir als äquivalentes System das folgende

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = L_1 = L_2 = L_3 = R_0 = 0.$$

Dann ist L_0 von L_1, L_2, L_3 linear abhängig; $Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 0$ werden identisch erfüllt. Ist endlich $\gamma_0 = 0, \alpha_0 = 0$, so wird

$$\begin{aligned} \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 &= 0, & \gamma_1 R_1 + \gamma_2 R_2 + \gamma_3 R_3 &= 0, \\ \beta_0 R_0 + \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 &= 0, & \delta_0 L_0 + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \beta_3 R_3 &= 0, \end{aligned}$$

so daß wieder nur vier unabhängige Größen übrig bleiben.

Die Bewegung (α, β) und die Umlegung (γ, δ) transformieren in

¹⁹⁾ Combébiac, Calcul des Triquaternions; Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels; Bricard, Nouv. Ann. de Math. 10 (1910); Schoenflies, Rend. Circ. Mat. Palermo 29 (1910).

diesem letzten Falle, wo also Linksgebüsch und Rechtsgebüsch sich in einem Somenbündel durchdringen, eine Ebene u in gleicher Weise in eine Ebene u' :

$$(69) \quad \begin{aligned} u_0 &= \alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \dots - \beta_0 \gamma_0 - \beta_1 \gamma_1 - \dots, \\ u_1 &= \alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_2 - \alpha_3 \gamma_3, \dots \\ u'_0 &= \alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \dots + \beta_0 \gamma_0 + \beta_1 \gamma_1 + \dots, \\ u'_1 &= \alpha_0 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3, \dots \end{aligned}$$

Ist außer u noch die Umlegung gegeben, so ist dadurch die Bewegung bestimmt

$$(70a) \quad \begin{aligned} (\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \alpha_0 &= \quad \quad \quad + u_1 \gamma_1 + u_2 \gamma_2 + u_3 \gamma_3, \\ (\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \alpha_1 &= -u_1 \gamma_0 \quad \quad \quad + u_2 \gamma_3 - u_3 \gamma_2, \dots \\ (\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \beta_0 &= -u_0 \gamma_0 - u_1 \delta_1 - u_2 \delta_2 - u_3 \delta_3, \\ (\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \beta_1 &= -u_0 \gamma_1 + u_1 \delta_0 - u_2 \delta_3 + u_3 \delta_2, \dots \end{aligned}$$

Ist dagegen außer u noch die Bewegung gegeben, so folgt für die Umlegung

$$(70b) \quad \begin{aligned} (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \gamma_0 &= \quad \quad \quad - u_1 \alpha_1 - u_2 \alpha_2 - u_3 \alpha_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \gamma_1 &= u_1 \alpha_0 \quad \quad \quad - u_2 \alpha_3 + u_3 \alpha_2, \dots \\ (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \delta_0 &= u_0 \alpha_0 + u_1 \beta_1 + u_2 \beta_2 + u_3 \beta_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \delta_1 &= u_0 \alpha_1 - u_1 \beta_0 + u_2 \beta_3 - u_3 \beta_2, \dots \end{aligned}$$

Die durch die Formeln (66a) und (67a) vermittelte Beziehung zwischen Linksgebüsch und Bewegungen, Rechtsgebüsch und Umlegungen wird *lückenlos* umkehrbar eindeutig, wenn man die Forderungen (9) und (19) fallen läßt („Ausgeartete“ Bewegungen und Umlegungen), oder wenn wir von den Bewegungen und Umlegungen zu Somen übergehen:

Satz 16. *Die Gesamtheit der Linksgebüschse läßt sich lückenlos umkehrbar eindeutig beziehen auf die Gesamtheit der (eentlichen und uneentlichen) rechtseitigen Somen, die Gesamtheit der Rechtsgebüschse auf die der linkseitigen Somen.*

Dazu hat man freilich die Formeln (66a), (67a) nötigenfalls durch folgende zu ergänzen:

$$(66b) \quad \begin{aligned} \alpha_0 \mathfrak{X}_{123} + \beta_1 \mathfrak{X}_{01} + \beta_2 \mathfrak{X}_{02} + \beta_3 \mathfrak{X}_{03} &= 0, \\ \alpha_1 \mathfrak{X}_{123} - \beta_0 \mathfrak{X}_{01} + \beta_2 \mathfrak{X}_{12} - \beta_3 \mathfrak{X}_{31} &= 0, \dots \end{aligned}$$

$$(67b) \quad \begin{aligned} \gamma_0 \mathfrak{X}_{123} + \delta_1 \mathfrak{X}_{23} + \delta_2 \mathfrak{X}_{31} + \delta_3 \mathfrak{X}_{13} &= 0, \\ \gamma_1 \mathfrak{X}_{123} - \delta_0 \mathfrak{X}_{23} + \delta_2 \mathfrak{X}_{03} - \delta_3 \mathfrak{X}_{02} &= 0, \dots \end{aligned}$$

So erhält man beispielsweise das Linksgebüsch aller uneigentlichen Somen für

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \dots \quad \beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \dots$$

Hierin liegt die Möglichkeit, auch ein Linksgebüsch, und ebenso ein Rechtsgebüsch durch acht homogene Parameter mit verbindender quadratischer Relation darzustellen (§ 3). —

Durch die Abbildung auf Punktepaare lassen sich jetzt auch alle übrigen Fragen über lineare Somenmannigfaltigkeiten bequem beantworten. Wegen der Anwendungen auf Differentialgeometrie betrachten wir noch die Figur zweier Somenbüschel.

Zwei Somenbüschel lassen sich im allgemeinsten Falle nicht durch ein Somengebüsch verbinden; sie sollen dann gebüschfremd heißen. Dann sind sie auch bündelfremd (Satz 13). Es kann vorkommen, a) daß zu jedem Soma des einen Büschels ein einziges Soma des andern Büschels inzident ist. Das trifft für die beiden Büschel

$$\sigma_1 \mathfrak{A} + \sigma_2 \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \tau_1 \mathfrak{A}' + \tau_2 \mathfrak{B}'$$

immer dann ein, wenn die Matrix

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{A}\mathfrak{A}') & (\mathfrak{A}\mathfrak{B}') \\ (\mathfrak{B}\mathfrak{A}') & (\mathfrak{B}\mathfrak{B}') \end{vmatrix}$$

den Rang zwei hat. Die Gesamtheit aller Somen, die in jedem der beiden Büschel ein inzidentes Soma haben, bildet eine nichtlineare, irreduzible Mannigfaltigkeit, die den Zusammenhang einer singularitätenfreien M_2^2 besitzt.

b) Ist der Rang aber eins, so gibt es in jedem Büschel ein einziges Soma, welches zu allen Somen des andern Büschels inzident ist. Alle Somen, die in jedem Büschel ein inzidentes Soma haben, verteilen sich dann auf zwei Somenbündel, die sich in einem Somenbüschel durchsetzen, oder c) die beiden ursprünglichen Somenbüschel haben ein Soma gemeinsam. Wir geben für alle drei Fälle ein Beispiel.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sigma_1 : \sigma_2 : 0 : 0 : \quad 0 : 0 : 0 : 0, \\ & 0 : 0 : 0 : 0 : \quad \tau_1 : \tau_2 : 0 : 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{b)} & \sigma_1 : \sigma_2 : 0 : 0 : \quad 0 : 0 : 0 : 0, \\ & 0 : 0 : \tau_1 : 0 : \quad 0 : \tau_2 : 0 : 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \sigma_1 : \sigma_2 : 0 : 0 : \quad 0 : 0 : 0 : 0, \\ & \tau_1 : 0 : 0 : 0 : \quad 0 : \tau_2 : 0 : 0. \end{array}$$

Ferner ist es möglich, daß zwei Somenbüschel sich durch ein einziges Somengebüsch verbinden lassen. Dann sind sie bündelfremd (Satz 13),

und haben kein Soma gemeinsam. Zwei Fälle (Linksgebüsch, Rechtsgebüsch).

Sodann kann es vorkommen, daß die beiden Somenbüschel sich durch genau zwei Somengebüschse verbinden lassen, ein Linksgebüsch und ein Rechtsgebüsch. Sie haben dann ein Soma gemeinsam und können durch ein Somenbündel verbunden werden.

Endlich können die beiden Somenbüschel zusammenfallen; dann gibt es ∞^1 verbindende Linksgebüschse und ebensoviel Rechtsgebüschse.

Für alle nicht gebüschfremden Paare von Somenbüscheln hat die vorhin betrachtete Matrix den Rang Null.

Wir sind jetzt in der Lage, einen zurückgestellten Beweis nachholen zu können. Da es ∞^6 Linksgebüschse gibt, so bleibt jedes in Ruhe bei einer Gruppe von Somentransformationen, die von $28 - 6 = 22$ Parametern abhängt. Ihre Transformationen gehören sämtlich zu G_{22} , d. i. nicht zu H_{22} . Ist das Linksgebüsch insbesondere das aller uneigentlichen Somen, so liegt die Gruppe G_{22} vor.

11. Die Abbildung (61), (62) der Somen auf Punktpaare war mit Singularitäten behaftet; die Somen der Eigenschaft $\mathfrak{K}_0 = 0$, die wir kurz *kritisch* nennen, konnten nicht abgebildet werden. Diese Ausnahmefälle lassen sich beseitigen, wenn man eine neue Begriffsbildung vornimmt, und von *kritischen Punktpaaren* redet. Ein solches ist freilich nur zum Teil der Anschauung zugänglich; es besteht, wie wir vorwegnehmen, in einem mit einer Zahl belasteten geordneten Paare orientierter Richtungen, oder vielmehr aus zwei solchen, in bestimmter Weise gekoppelten „Figuren“.

Ein Somenbüschel kann ganz aus kritischen Somen bestehen. Im andern Falle hat es ein einziges kritisches Soma, und wir betrachten alle ∞^4 Somenbüschel, die dasselbe kritische Soma besitzen. Jedes von ihnen ist nach § 9 abgebildet auf ein Paar isometrisch bezogener Geraden, die zwanglos als Anfangsgerade und Endgerade unterschieden werden. Für die genannten ∞^4 Somenbüschel sind nun die Anfangsgeraden sämtlich zueinander parallel, und ebenso die Endgeraden unter sich. Die beiden so bestimmten Parallelenbündel geben aber Veranlassung zu ∞^5 Somenbüscheln, definieren das kritische Soma also noch nicht; es muß noch eine Angabe über die Art der isometrischen Beziehung hinzukommen.

Ist \mathfrak{P} eine *eigentliche* Anfangsgerade, \mathfrak{P}' eine *eigentliche* Endgerade (Plücker'sche Koordinaten), so sei

$$\mathfrak{P}_{11} = \mathfrak{P}_{02} \mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{P}_{03} \mathfrak{P}_{21}, \dots \quad \mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}_{01}^2 + \mathfrak{P}_{02}^2 + \mathfrak{P}_{03}^2.$$

Dann geben die ∞^1 Punktpaare

$$(71) \quad \begin{aligned} P: \quad x &= \mathfrak{P}_{11} + (t - c) \mathfrak{P} \mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}^2, \dots \\ P': \quad x' &= \mathfrak{P}'_{11} + (t + c) \mathfrak{P}' \mathfrak{P}'_{01} : \mathfrak{P}'^2, \dots \end{aligned}$$

für veränderliches t eine isometrische Beziehung zwischen den *Speeren* $\mathbb{P}:\mathbb{P}_0:\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}':\mathbb{P}'_0:\mathbb{P}'_1$. Läßt man dann noch c variieren, so resultiert eine andere isometrische Beziehung. Das dem Punktepaar $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$ zugeordnete Soma heißt nach (61)

$$(72) \quad \begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= 2\mathbb{P}^2\mathbb{P}'^2, \quad \mathbb{X}_{01} = \mathbb{P}'^2\mathbb{P}_{11} + \mathbb{P}^2\mathbb{P}'_{11} + (t-c)\mathbb{P}^2\mathbb{P}\mathbb{P}_{01} + (t+c)\mathbb{P}^2\mathbb{P}'\mathbb{P}'_{01}, \\ \mathbb{X}_{123} &= \frac{1}{2}\mathbb{P}^3\{\mathbb{P}_{23}^2 + \mathbb{P}_{31}^2 + \mathbb{P}_{12}^2\} - \frac{1}{2}\mathbb{P}'^3\{\mathbb{P}_{23}^2 + \mathbb{P}_{31}^2 + \mathbb{P}_{12}^2\} + 2ct\mathbb{P}^2\mathbb{P}'^2, \\ \mathbb{X}_{23} &= \mathbb{P}'^2\mathbb{P}_{11} - \mathbb{P}^2\mathbb{P}'_{11} + (t-c)\mathbb{P}'^2\mathbb{P}\mathbb{P}_{01} - (t+c)\mathbb{P}^2\mathbb{P}'\mathbb{P}'_{01}, \dots \end{aligned}$$

Jetzt sei c fest und t veränderlich. Dann stellt (72) ein Somenbüschel dar, dessen kritisches Soma sich durch Grenzübergang zu $t = \infty$ ermittelt:

$$(61a) \quad \begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= 0, \quad \mathbb{X}_{01} = \mathbb{P}'\mathbb{P}_{01} + \mathbb{P}\mathbb{P}'_{01}, \dots \\ \mathbb{X}_{123} &= 2c\mathbb{P}\mathbb{P}', \quad \mathbb{X}_{23} = \mathbb{P}'\mathbb{P}_{01} - \mathbb{P}\mathbb{P}'_{01}, \dots \end{aligned}$$

Hierin kommt wohl c vor, aber nicht mehr die Linienkoordinaten $\mathbb{P}_{23}, \dots, \mathbb{P}'_{23}, \dots$. Ändert man also die Gerade \mathbb{P} oder \mathbb{P}' innerhalb ihres Parallelenbündels ab, so bleibt das kritische Soma dasselbe. Ändert man die Orientierung *beider* Geraden, und außerdem noch das Vorzeichen der Belastung c ab, so gewinnt man gleichfalls dasselbe kritische Soma. Sind umgekehrt dessen Koordinaten gegeben, so wird nämlich *doppdeutig*

$$(62a) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}_{01}:\mathbb{P} &= \varrho(\mathbb{X}_{01} + \mathbb{X}_{23}), \dots, \quad \mathbb{P}'_{01}:\mathbb{P}' = \varrho(\mathbb{X}_{01} - \mathbb{X}_{23}), \dots, \quad c = \varrho\mathbb{X}_{123}; \\ 1:\varrho^2 &= \mathbb{X}_{01}^2 + \mathbb{X}_{02}^2 + \mathbb{X}_{03}^2 + \mathbb{X}_{23}^2 + \mathbb{X}_{31}^2 + \mathbb{X}_{12}^2. \end{aligned}$$

Ein kritisches Punktepaar ist jetzt zu erklären als die „Figur“ zweier mit je einer Zahl belasteter geordneter Speerrichtungen, die sich nicht ändert, wenn man alle Orientierungen und die Vorzeichen der Belastungen abändert. Jetzt läßt sich *ausnahmslos* jedem Soma ein Punktepaar umkehrbar eindeutig zuordnen¹⁴).

Die Belastung c vermittelt eine Zuordnung zwischen den (orientierten) Normalebenen der orientierten Richtungen \mathbb{P} und \mathbb{P}' . Der Normalebene zu \mathbb{P} im Nullabstand $t-c$ wird zugeordnet die Normalebene zu \mathbb{P}' im Nullabstand $t+c$ (vgl. (71)). Jeder Punkt P kann mit allen ∞^2 Punkten P' einer Ebene (II) verbunden werden, ebenso jeder Punkt P' mit allen ∞^2 Punkten P einer Ebene (I), wenn I und II solche zugeordneten Normalebenen von \mathbb{P} und \mathbb{P}' sind. So erhält man ∞^5 Punktepaare ($P \rightarrow P'$), die alle zum kritischen Paar $(\mathbb{P}, \mathbb{P}', c)$ isometrisch zu nennen sind, denn aus der Inzidenzbedingung der zugehörigen Somen folgt als Bedingung für *isometrische Lage der Paare* $x \rightarrow x'$ und $(\mathbb{P}, \mathbb{P}', c)$

$$(73) \quad \mathbb{P}\{x'_1\mathbb{P}'_{01} + x'_2\mathbb{P}'_{02} + x'_3\mathbb{P}'_{03}\} - \mathbb{P}'\{x_1\mathbb{P}_{01} + x_2\mathbb{P}_{02} + x_3\mathbb{P}_{03}\} = 2c\mathbb{P}\mathbb{P}'.$$

¹⁴) Wenn man noch ein uneigentliches kritisches Paar, dem Soma $0:0:0:0:1:0:0:0$ entsprechend, einführt. Es lohnt sich aber wohl nicht, näher darauf einzugehen.

Beseitigt man den Faktor $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ rechts, so geben die beiden Glieder links die Projektionen des Vektors nach dem Endpunkt [Anfangspunkt] auf die orientierte Endrichtung [Anfangsrichtung], wenn die beiden Vektoren im Nullpunkt angeheftet werden.

Isometrische Lage der beiden kritischen Paare $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', c_1)$ und $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', c_2)$ wird jetzt erklärt durch

$$(74) \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'(\mathfrak{P}_{01}\mathfrak{Q}_{01} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{Q}_{02} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{Q}_{03}) = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}'_{01}\mathfrak{Q}'_{01} + \mathfrak{P}'_{02}\mathfrak{Q}'_{02} + \mathfrak{P}'_{03}\mathfrak{Q}'_{03}):$$

Der (nur durch seinen Kosinus gegebene) Winkel zwischen den beiden Anfangsrichtungen ist gleich dem Winkel zwischen den beiden Endrichtungen.

Die kritischen Paare, die *uneigentlichen* Somen zugeordnet sind, sind dadurch charakterisiert, daß Anfangsrichtung und Endrichtung zueinander entgegengesetzt sind.

Ist das nicht der Fall, so steht die Belastung c in naher Beziehung zur Schrittweite $2H_0$ der Umschraubung, die das zugeordnete, jetzt eigentliche Soma aus dem Protosoma hervorgehen läßt. Orientiert man dann die Umschraubungsachse durch die Forderung

$$\sqrt{2\mathfrak{P}^2\mathfrak{P}'^2 + 2\mathfrak{P}\mathfrak{P}'(\mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}'_{01} + \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}'_{02} + \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}'_{03})} = 2\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'),$$

so wird

$$c = H_0 \cos\frac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}').$$

Es soll noch gezeigt werden, wie sich die Somenbüschel abbilden, die ganz aus kritischen Somen bestehen. Bilder der Grundsomen im Büschel seien die Paare $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', c_1)$ und $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', c_2)$. Da sie isometrisch sein müssen, so liegen die geradlinigen Träger von \mathfrak{P}' und \mathfrak{Q}' getrennt, sobald es die von \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} tun, und umgekehrt. \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} sind parallel zu den Ebenen eines Parallelebenenbüschels, entsprechend \mathfrak{P}' und \mathfrak{Q}' . Parallel zum ersten dieser beiden Ebenenbüschel nimmt man eine beliebige Richtung \mathfrak{R} , parallel zum zweiten ebenso eine Richtung \mathfrak{R}' . Dann bestimmen \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' , mit geeigneter Belastung versehen, ein veränderliches Soma im Somenbüschel.

Sind aber die Träger von \mathfrak{P} und \mathfrak{Q} identisch, so sind es auch die von \mathfrak{P}' und \mathfrak{Q}' . Dann darf angenommen werden, daß \mathfrak{P} mit \mathfrak{Q} zusammenfällt, und \mathfrak{P}' mit \mathfrak{Q}' . Dieses Paar orientierter Richtungen ist dann allen Somen des Büschels in gleicher Weise zugehörig, und diese unterscheiden sich dann nur durch die Belastung.

Dieselben beiden Fälle sind zu unterscheiden, wenn das Somenbüschel ganz aus *uneigentlichen* Somen besteht. Dann müssen noch \mathfrak{P}' zu \mathfrak{P} , \mathfrak{Q}' zu \mathfrak{Q} entgegengesetzt sein.

Man macht sich die Verhältnisse am besten klar, wenn man die sphärische Abbildung der orientierten Richtungen auf die Einheitskugel zu Hilfe nimmt.

12. Die Abbildung der Somen auf die Punktepaare erweist sich besonders auch beim Studium nicht linearer Somenfiguren so anschaulich und fruchtbringend, daß wir sie zunächst auf andere Weise herleiten und sodann ihre konstruktive Durchführung bringen wollen.

Man setze

$$(75) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0 + \kappa^2 \mathfrak{X}_{123} &= \xi_0, & \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23} &= \xi_1, \dots \\ \mathfrak{X}_0 - \kappa^2 \mathfrak{X}_{123} &= \xi'_0, & \mathfrak{X}_{01} - \mathfrak{X}_{23} &= \xi'_1, \dots, \end{aligned}$$

wo κ^2 eine beliebige positive Konstante ist, die zunächst von Null verschieden sei. Dann ist

$$(76) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0 &= \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi'_0), & \mathfrak{X}_{01} &= \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi'_1), \dots \\ \kappa^2 \mathfrak{X}_{123} &= \frac{1}{2}(\xi_0 - \xi'_0), & \mathfrak{X}_{23} &= \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi'_1), \dots \end{aligned}$$

$$(77) \quad 2(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \frac{1}{\kappa^2} \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \frac{1}{\kappa^2} \xi_0'^2 - \xi_1'^2 - \xi_2'^2 - \xi_3'^2 = 0.$$

Setzen wir demgemäß noch

$$(78) \quad \frac{1}{\kappa^2} \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{1}{\kappa^2} \xi_0'^2 + \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2,$$

so vermitteln die Formeln (75) und (76) eine lückenlos umkehrbar eindeutige Zuordnung der Somen auf die Paare $(\xi_0: \xi_1: \xi_2: \xi_3) \rightarrow (\xi_0: \xi_0': \xi_1': \xi_2': \xi_3')$ von Punkten des R_4 , die der singularitätenfreien M_3^2 entnommen werden können, deren Gleichung in (78) enthalten ist. Oder vielmehr auf Doppelpaare, denn man kann das angegebene Paar auch ersetzen durch das Paar $(-\xi_0: \xi_0': \xi_1': \xi_2': \xi_3')$. Auf die M_3^2 bauen wir eine projektive Maßbestimmung auf:

$$(79) \quad \cos \kappa(\xi, \eta) = \frac{1}{\kappa^2} \xi_0 \eta_0 + \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 + \frac{1}{\kappa^2} \xi_0' \eta_0'.$$

Wegen

$$2(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \xi_0 \eta_0 + \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 \right\} - \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \xi_0' \eta_0' + \xi_1' \eta_1' + \xi_2' \eta_2' + \xi_3' \eta_3' \right\}$$

sind dann inzidente Somen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} abgebildet auf Doppelpaare, die isometrisch sind im Sinne der durch (78) und (79) definierten Nicht-euklidischen Geometrie:

$$\cos \kappa(\xi, \eta) = \cos \kappa(\xi', \eta').$$

Wir wollen jetzt den Grenzübergang zu $\kappa^2 = 0$ vornehmen, und berechnen dazu

$$\frac{1}{\kappa^2} \sin^2 \kappa(\xi, \eta) = \frac{(\xi|\xi) \eta_0^2 + (\eta|\eta) \xi_0^2 - 2(\xi|\eta) \xi_0 \eta_0 + \kappa^2 \{ (\xi|\xi)(\eta|\eta) - (\xi|\eta)^2 \}}{\xi_0^2 \eta_0^2 + \kappa^2 \{ (\xi|\xi) \eta_0^2 + (\eta|\eta) \xi_0^2 \} + \kappa^4 (\xi|\xi)(\eta|\eta)},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(\xi|\eta) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3.$$

In der Grenze wird daraus

$$(\xi, \eta)^2 = \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - \frac{\eta_1}{\eta_0}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{\xi_0} - \frac{\eta_2}{\eta_0}\right)^2 + \left(\frac{\xi_3}{\xi_0} - \frac{\eta_3}{\eta_0}\right)^2,$$

so daß das Symbol (ξ, η) zur *Euklidischen* Entfernung der Punkte $(\xi_0: \xi_1: \xi_2: \xi_3)$ und $(\eta_0: \eta_1: \eta_2: \eta_3)$ geworden ist. Die M_3^2 wird in der Grenze zu

$$\xi_\omega^2 - \xi_0^2 = \xi_\omega'^2 - \xi_0'^2 = 0.$$

Setzen wir $\xi_\omega - \xi_0 = \xi_\omega' - \xi_0' = 0$, also $\xi_\omega = \xi_0'$, so geht (76) über in

$$X_0 = \xi_0, \quad X_{01} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_1'), \dots, \quad X_{23} = \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_3'), \dots,$$

während $X_{123} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}(\xi_0 - \xi_0')$ aus (2) zu entnehmen ist. Damit sind die Formeln (61) wiedergewonnen. Die Annahme $\xi_\omega + \xi_0 = \xi_\omega' + \xi_0' = 0$ liefert dasselbe, während die beiden sonst noch denkbaren Möglichkeiten nichts Brauchbares ergeben. In der Grenze liegen nicht mehr Doppelpaare der M_3^2 , oder was dasselbe ist, des *konformen* dreidimensionalen Raumes vor, sondern einfache Paare im *projektiven* Raum. Dafür treten die Singularitäten auf, mit denen wir uns in § 11 beschäftigen mußten.

Die konstruktive Durchführung der Abbildung kann in einigermaßen befriedigender Weise erfolgen, wenn wir vom Punktepaar $P \rightarrow P'(x \rightarrow x')$ ausgehen, und jedesmal die Bestimmungstücke der Bewegung aufsuchen, die das Protosoma in das gesuchte zugeordnete Soma überführt. Es ist eine ganze Reihe von Fällen zu unterscheiden; die dabei eingeführten Bezeichnungen behalten in jedem folgenden Falle ihre Gültigkeit.

M sei die Mitte von PP' , und O der Mittelpunkt des Protosoma.

1. P und P' sollen in O zusammenfallen. Identische Bewegung. Protosoma.

2. P und P' getrennt, aber M fällt nach O . Schiebung. OP' gibt nach Länge und Richtung die Schrittweite und Schiebungsrichtung.

3. P' falle mit P zusammen, M sei von O verschieden. Drehung um die Achse OM . Nach beliebiger Orientierung wird $\text{tg } \Theta_0 = MO = -OM$.

4. P' sei von P verschieden, M von O , aber PP' laufe durch O . Schraubung um OM . Es bedeute P^* das Spiegelbild von P' in bezug auf O , und M^* die Mitte zwischen P und P^* . Nach beliebiger Orientierung der Schraubenachse ist dann

$$\text{tg } \Theta_0 = MO, \quad H_0 = M^*O.$$

5. Jetzt laufe PP' nicht durch O . Für $OP' = OP$ liegt eine Drehung, sonst eine Schraubung vor, deren Achsen parallel zu OM , aber nicht mehr durch O laufen. Das Lot von O auf P^*P habe den Fußpunkt Q . Bei irgend welcher syntaktischen Orientierung von OM und P^*P wird

$$\text{tg } \Theta_0 = MO, \quad H_0 = M^*Q.$$

Über eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Paul Hertz in Göttingen.

Über Z Urnen sei eine große Zahl N von Kugeln verteilt. Sei x der relative Inhalt einer Urne, d. h. die durch N dividierte Anzahl der in ihr enthaltenen Kugeln, und $\varphi(x)dx$ die durch Z dividierte Zahl von Urnen mit einem relativen Inhalt zwischen x und $x + dx$ (also die Wahrscheinlichkeit dafür, bei willkürlicher Wahl auf eine Urne mit einem solchen Inhalte zu treffen). Die Funktion $\varphi(x)$ ist anfangs gegeben; darauf wird willkürlich eine Kugel aus einer Urne in eine andere gelegt. Welche Funktion $\varphi(x)$ ist nun zu erwarten?

Wir wollen zunächst noch N beliebig (nicht nur sehr groß) annehmen, mit $X = xN$ die Zahl der Kugeln in einer Urne bezeichnen, mit $\Phi(X)$ die durch Z dividierte Anzahl Urnen vom Kugelgehalt X , mit $\Phi^*(X)$ dieselbe Größe nach der Umlegung und mit $\overline{\Phi^*}(X)$ ihren Mittelwert für alle Umlegungen¹⁾. Dann ist

$$(1) \quad \sum \Phi(X) = 1,$$

$$(2) \quad \sum \Phi(X) X = \frac{N}{Z}.$$

Nun benutzen wir, daß $\Phi(X)$ resp. $\overline{\Phi^*}(X)$ auch die Wahrscheinlichkeit bedeutet, bei willkürlichem Herausgreifen einer Urne vor resp. nach der Umlegung den Inhalt X anzutreffen. Es werde also nach der Umlegung eine Urne bezeichnet; dafür, daß diese den Inhalt X besitzt, gibt es drei Chancen:

1. Die gewählte Urne kann vor der Umlegung den Inhalt X besessen haben; dann darf die Umlegung nichts an ihrem Inhalte geändert haben.

¹⁾ Dabei gelte für das Herausnehmen jede Kugel, für das Hineinlegen jede Urne als gleichberechtigt.

2. Man kann auf eine Urne getroffen sein, die vorher den Inhalt $X - 1$ hatte; dann muß die Umlegung eine neue Kugel in sie hineinbracht haben.

3. Die betreffende Urne hatte die Kugelzahl $X + 1$; es muß ihr dann also eine Kugel entzogen worden sein.

Die Umlegung selbst besteht aus zwei Teilprozessen: Die Kugel wird aus einer Urne herausgenommen und in eine andere hineingelegt. Dafür, daß eine vorbezeichnete Urne eine Kugel verliert, besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{X}{N}$ ^{a)}, und dafür, daß einer gegebenen Urne eine Kugel zuerteilt wird, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{Z}$.

Dies alles berücksichtigend, erhält man:

$$\begin{aligned} (3) \quad \overline{\Phi^*}(X) &= \Phi(X) \left[\left(1 - \frac{X}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) + \frac{X}{N} \frac{1}{Z} \right] \\ &+ \Phi(X-1) \left[\left(1 - \frac{X-1}{N}\right) \frac{1}{Z} \right] \\ &+ \Phi(X+1) \left[\frac{X+1}{N} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) \right]. \end{aligned}$$

Man kann natürlich (3) auch ableiten, *ohne* zu benutzen, daß $\Phi(X)$ eine Wahrscheinlichkeit bedeutet: Versteht man unter $\Phi(X)Z$ lediglich die Anzahl von Urnen mit dem Inhalte X , und betrachtet eine Gesamtheit von sehr vielen Urnenscharen, denen allen dasselbe Zahlensystem $\Phi(1), \Phi(2), \Phi(3), \dots$ zukommt, so erhält man nach den Umlegungen eine neue Gesamtheit von Scharen mit verschiedenen Funktionen $\Phi^*(X)$. Der über die Gesamtheit genommene Mittelwert $\overline{\Phi^*}(X)$ wird aber durch die rechte Seite von (3) gegeben ^{a)}.

Nun seien Z und N/Z sehr groß.

Setzen wir

$$(4) \quad \frac{X}{N} = x,$$

$$(5) \quad \Phi(X) = \varphi(x) dx = \varphi(x) \frac{1}{N},$$

$$(6) \quad \frac{1}{Z} = \alpha,$$

^{a)} Hierzu wie überhaupt zu der ganzen Problemstellung vgl. P. und T. Ehrenfest, *Math.-naturw. Blätter* Nr. 11 und 12 (1906); *Phys. Zeitschr.* 8 (1907), S. 311.

^{a)} Genauer: Man beweist mit Hilfe des Bernoullischen Theorems, daß bei wachsender Zahl der Urnenscharen in der Gesamtheit die Differenz von $\overline{\Phi^*}(X)$ und der rechten Seite von (3) mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit beliebig klein wird.

so ist zunächst nach (1) und (2)

$$(7) \quad \int \varphi(x) dx = 1,$$

$$(8) \quad \int \varphi(x) x dx = \alpha.$$

Ferner erhalten wir aus (3) bei Beschränkung auf Glieder von erster Ordnung in $\frac{1}{N}$

$$(9) \quad \overline{\varphi^*}(x) = \varphi + \frac{1}{N} \varphi + \frac{1}{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x - \alpha).$$

Bezeichnen wir also mit $\varphi(x, \tau)$ die nach τ Umlegungen im Mittel vorhandene Funktion, so ist

$$(10) \quad N \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x - \alpha).$$

Hier können wir noch setzen:

$$(11) \quad \frac{\tau}{N} = t,$$

$$(12) \quad \frac{x}{\alpha} = z = \zeta + 1,$$

$$(13) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \psi(z) = \frac{1}{\alpha} \chi(\zeta),$$

so daß nach (7) und (8) gilt:

$$(14) \quad \int \psi(z) dz = 1; \quad \int \chi(\zeta) d\zeta = 1.$$

$$(15) \quad \int \psi(z) z dz = 1; \quad \int \chi(\zeta) \zeta d\zeta = 0.$$

Dann hat man

$$(16) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi + \frac{\partial \psi}{\partial z} (z - 1)$$

oder

$$(17) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} (\zeta \chi).$$

Wenn eine für $\zeta = \pm \infty$ verschwindende Funktion anfangs (14) genügt, so wird nach (17) $\int \frac{\partial \chi}{\partial t} d\zeta = 0$, also (14) auch weiterhin befriedigt. Ebenso ist $\frac{\partial}{\partial t} \int \zeta \chi d\zeta = \int \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi) d\zeta = - \int \zeta \chi d\zeta$. Wenn also (15) anfangs erfüllt ist, so ist das auch weiterhin der Fall.

Wir setzen nun $\chi(\zeta, 0) = \chi_0(\zeta)$ und erhalten durch Integration von (17)

$$(18) \quad \chi = e^t \cdot \chi_0(\zeta e^t).$$

Denkt man sich also den Zustand der Urnenschar durch eine Verteilungskurve charakterisiert, deren Abszisse $\zeta^4)$ und deren Ordinate $\chi^5)$ ist, so kann man sagen:

Die Verteilungskurve einer Schar bleibt sich ähnlich. Die späteren Kurven gehen aus den früheren hervor durch Kompression der Ebene gegen die Ordinatenachse und Dehnung im selben Maßstabe von der Abszissenachse weg.

Eine so deformierte Kurve wird sich der Ordinatenachse immer enger anschließen, d. h. die Verteilung der Gleichverteilung zustreben. Obwohl sich also das Maximum immer mehr der Ordinatenachse nähert, braucht doch auf dieser selbst kein Maximum vorhanden zu sein. Ja, wenn die Kurve anfangs auf ihr ein Minimum (eine Einstülpung) besitzt, wird sich dieses dort dauernd erhalten.

Die Irreversibilität der Veränderung findet auch in dem Verhalten des Mittelwertes $\bar{\zeta}^2$ ihren Ausdruck. Nach (18) ist

$$(19) \quad \bar{\zeta}^2 = e^{-2t} \bar{\zeta}_0^2$$

oder

$$(20) \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\zeta}_0^2}{\bar{\zeta}^2}.$$

Es darf nicht vergessen werden, daß die Funktionen φ, ψ, χ nur durch Mittelwertbildung über Gesamtheiten von sehr vielen Urnenscharen gewonnen sind. Je größer t ist, desto mehr Scharen müssen zur Mittelwertbildung herangezogen werden. Umgekehrt, hält man die Zahl der Urnenscharen fest und läßt t unbegrenzt wachsen, so wird man auch wieder einmal die anfängliche Verteilungsfunktion antreffen.

Göttingen, den 5. Dezember 1919.

⁴⁾ Die Abweichung vom Normalinhalt, diesen als Einheit gesetzt.

⁵⁾ Die Dichte der relativen Häufigkeit.

(Angenommen 5. Dezember 1919.)

Über die Singularitäten algebraischer Gebilde.

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Einleitung.

Der Begriff der singulären Punkte einer algebraischen Kurve oder Fläche wird in der vorliegenden Arbeit auf einen beliebigen (unhomogen geschriebenen) Modul und damit auf ein beliebiges algebraisches Gebilde im Raume von mehreren Dimensionen übertragen¹⁾. Nun hängt der Charakter einer Singularität natürlich wesentlich ab von den Transformationen des Raumes bzw. der betreffenden Mannigfaltigkeit, die man als zulässig ansieht. Während die allgemeinsten, auf einer ebenen algebraischen Kurve *birationalen* Transformationen jeden singulären Punkt in gewöhnliche Doppelpunkte aufzulösen gestatten, die Besonderheit der Singularität also völlig aufheben, sind gegenüber allgemeinen *linearen* Transformationen gewisse von M. Noether und anderen studierte charakteristische Zahlen²⁾ invariant.

Hier werden nun solche Transformationen zugrunde gelegt, die für das betreffende Gebilde *umkehrbar ganz rational*, also im Endlichen eindeutig sind. Dadurch geht, wie in § 1 gezeigt wird, der Modul in einen anderen über, *dessen Restgruppe zu der des gegebenen isomorph ist* (Satz I), womit die ganze Untersuchung auf die Theorie der Restgruppen zurückgeführt wird. Es wird nämlich weiterhin gezeigt, daß auch die Restgruppe des zur Charakterisierung der Singularitäten dienenden Moduls bei den genannten Transformationen in eine isomorphe Restgruppe übergeht, so daß in einem wohlbestimmten Sinne diese selbst der gegebenen Restgruppe

¹⁾ Vgl. für Primmoduln und das kleinste gemeinsame Vielfache von Primmoduln derselben Mannigfaltigkeit bereits Macaulay, *The algebraic Theory of Modular Systems* [Cambridge Tracts 19 (1916), 112 S.], S. 34.

²⁾ Vgl. z. B. Brill-Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* [Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 3 (1894), S. 109–566], S. 367–402.

als Invariante zugeordnet werden kann. Dieses Ergebnis erscheint auch vom Standpunkt der abstrakten Theorie der Restgruppen aus als bemerkenswert; es gilt auch bei Beschränkung des Koeffizientenbereiches auf einen beliebigen Körper, wenn dieser nur unendlich viele Konstanten enthält, insbesondere also z. B. für den Bereich aller reellen Zahlen. Es kann ferner noch dahin verfeinert werden, daß die singulären Punkte in endlich viele verschiedene Klassen eingeteilt werden, so daß die Restgruppen der Moduln der Punkte einer Klasse, die sogenannten „Singularitätengruppen“, einzeln isomorph bleiben (Satz III). So scheiden sich z. B. bei einer Raumkurve im dreidimensionalen Raum die singulären Punkte, die auch für jede hindurchgehende Fläche singulär sind, von denen, für die dies nicht der Fall ist. Weiterhin wird gezeigt, daß für eine reduzible Restgruppe (vgl. hierzu wie überhaupt bezüglich des Begriffes der Restgruppe meine Arbeit *Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen* [Math. Zeitschr. 3 (1918), S. 29–42]) auch die Singularitätengruppen in die bezüglichen Bestandteile reduzibel werden (Satz IV). — In § 2 wird gezeigt, was die Isomorphie der Singularitätengruppen bei eingliedrigen Moduln für die geometrische Gestalt der Umgebung entsprechender isolierter Singularitäten zur Folge hat: Die Bestandteile niedrigster Ordnung haben denselben Grad und linear verwandte Scharen der ersten Polaren (Satz V), so daß z. B. bei ebenen Kurven die Vielfachheit des Punktes, die Anzahl der verschiedenen Tangenten und die Vielfachheit einer jeden invariant ist.

An Hilfsmitteln gebrauche ich außer dem Begriffe der Restgruppe den Laskerschen Zerlegungssatz eines Moduls in primäre Moduln (E. Lasker, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* [Math. Ann. 60 (1905), S. 20–115]) in seiner Ausdehnung auf einen beliebigen Körper als Koeffizientenbereich (vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von E. Noether).

§ 1.

Die Singularitätengruppen.

Satz I. Zwei Moduln $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(y_1, \dots, y_n)$ mit Koeffizienten in einem festen Körper P haben dann und nur dann isomorphe Restgruppen, wenn es Polynome $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_m)$ und $g_i(y) = g_i(y_1, \dots, y_n)$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) gibt, so daß für die Restklassen ξ_1, \dots, ξ_m bzw. η_1, \dots, η_n von x_1, \dots, x_m bzw. y_1, \dots, y_n mod \mathfrak{M} bzw. mod \mathfrak{N} die Gleichungen gelten:

$$(1) \quad M(g(\eta)) = 0, \quad N(f(\xi)) = 0,$$

$$(2) \quad f_j(g(\eta)) = \eta_j, \quad g_i(f(\xi)) = \xi_i.$$

Dabei bedeutet $M(x) = M(x_1, \dots, x_m)$ ein beliebiges Polynom aus \mathfrak{M} , $N(y) = N(y_1, \dots, y_n)$ ein beliebiges Polynom aus \mathfrak{N} .

1. Die Restgruppen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} seien isomorph. Dann gibt es gewisse Größen aus \mathfrak{B} , die den Größen ξ_1, \dots, ξ_m von \mathfrak{A} zugeordnet sind, und die als ganze rationale Funktionen von η_1, \dots, η_n mit $g_1(\eta), \dots, g_m(\eta)$ bezeichnet werden mögen. Entsprechend seien die Größen aus \mathfrak{A} , die den Größen η_1, \dots, η_n von \mathfrak{B} zugeordnet sind, mit $f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)$ bezeichnet. Dann gelten wegen $M(\xi) = 0$ und $N(\eta) = 0$, weil die Zuordnung isomorph sein soll, auch die Gleichungen (1). Weil ferner die Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, so sind die beiden Größen $f_j(g(\eta))$ und η_j , die beide der Größe $f_j(\xi)$ entsprechen, einander gleich, und analog die Größen $g_i(f(\xi))$ und ξ_i . Daraus folgen die Relationen (2).

2. Es bestehen die Relationen (1) und (2) für gewisse Polynome f und g . Dann ordnen wir die Restklassen ξ_i und $g_i(\eta)$ einander zu und beziehen dadurch die Gruppe \mathfrak{A} auf die durch $g_i(\eta)$ erzeugte Untergruppe von \mathfrak{B} . Diese ist aber mit \mathfrak{B} identisch, da wegen der ersten Gleichung von (2) auch die Größe η_j , also jede Größe von \mathfrak{B} dazu gehört. Ferner gilt jede Relation zwischen den Größen ξ_1, \dots, ξ_m auch für die zugeordneten Größen, da ja nach (1) aus $M(\xi) = 0$ auch $M(g(\eta)) = 0$ folgt. Ist umgekehrt $F(g(\eta)) = 0$ eine Relation zwischen den Größen $g_1(\eta), \dots, g_m(\eta)$, so folgt aus der zweiten Gleichung von (1) auch $F(g(f(\xi))) = 0$. Andererseits ist der zweiten Gleichung von (2) wegen $F(g(f(\xi))) = F(\xi)$, und daher auch $F(\xi) = 0$. Hieraus ergibt sich aber unmittelbar die Isomorphie³⁾.

Zur Definition der *singulären Punkte eines Moduls* $\mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ verfahren wir nun folgendermaßen:

Es sei r eine positive ganze Zahl $\leq m$. Dann betrachten wir irgend r Polynome M_1, \dots, M_r , die zu \mathfrak{M} gehören, und bilden eine r -reihige Determinante der Form

$$(3) \quad D_r = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_{r_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_{r_r}} \end{vmatrix},$$

wobei r_1, \dots, r_m irgend r Indizes der Reihe $1, \dots, m$ bedeuten.

³⁾ Mit Hilfe des Hilbertschen Endlichkeitsatzes der Modulbasis läßt sich die Isomorphie auch unter der allgemeineren Voraussetzung beweisen, daß nur die Existenz von Polynomen f_j, g_i, h_j, k_i bekannt ist, für die die Relationen $M(g(\eta)) = 0$, $f_j(g(\eta)) = \eta_j$ und $N(h(\xi)) = 0$, $k_i(h(\xi)) = \xi_i$ gelten. Vgl. zum Beweise die analoge Schlußweise in der Arbeit Noether-Schmeidler, Moduln in nicht kommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken [Mathematische Zeitschrift 8 (1920), § 9].

Indem wir nun alle diese Determinanten zu \mathfrak{M} hinzufügen und daraus den kleinsten umfassenden Modul bilden, erhalten wir einen Teiler von \mathfrak{M} , dessen Koeffizienten dem Körper P angehören und den wir mit

$$(4) \quad \mathfrak{M}_r = (\mathfrak{M}, D_r)$$

bezeichnen wollen. Wir setzen ferner $\mathfrak{M}_0 = 1$. Es wird dann \mathfrak{M}_{r-1} ein Teiler von \mathfrak{M}_r ($1 \leq r \leq m$).

Sind die Polynome F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , so genügt es, um \mathfrak{M}_r zu erhalten, alle Determinanten (3) in den Modul aufzunehmen, die mit irgendwelchen r Polynomen F gebildet sind. Denn wegen

$$\frac{\partial M}{\partial x_r} \equiv A_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_r} + \dots + A_k \frac{\partial F_k}{\partial x_r} (\mathfrak{M}) \quad \text{für } M = A_1 F_1 + \dots + A_k F_k$$

wird die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_{r_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_{r_r}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & A_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{r_r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_{r_1}} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_{r_r}} \end{pmatrix} (\mathfrak{M})$$

in dem Sinne, daß die Differenz zweier entsprechender Elemente rechts und links zu \mathfrak{M} gehört. Bildet man nun nach bekannten Determinantensätzen die Determinante rechts und links, so findet man für $r > k$ rechts 0, also $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}$, für $r \leq k$ eine Summe von Produkten von Determinanten aus der ersten und zweiten Matrix rechts, dazu eine zu \mathfrak{M} gehörende Funktion, womit die Behauptung bewiesen ist.

Beispiel 1. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y) = (F(x, y))$ sei ein Kurvenmodul in der Ebene. Dann ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = (F, F_x, F_y)$ ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Punkte der Kurve $F = 0$ sind.

Beispiel 2. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z) = (F(x, y, z))$ sei ein Flächenmodul im Raume. Es wird $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = (F, F_x, F_y, F_z)$ ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Stellen der Fläche sind. — Allgemeiner gilt Entsprechendes für jeden eingliedrigen Modul in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen.

Beispiel 3. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x, y, z) = (F, G)$ sei ein Kurvenmodul im Raume. Es wird $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}$, ferner

$$\mathfrak{M}_2 = \left(F, G, \begin{vmatrix} F_x F_y \\ G_x G_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x F_z \\ G_x G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_y F_z \\ G_y G_z \end{vmatrix} \right)$$

ein Modul, dessen Nullstellen die singulären Punkte der Kurve $F = 0$, $G = 0$ sind. Endlich wird

$$\mathfrak{M}_1 = (F, G, F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z)$$

ein Modul, dessen Nullstellen diejenigen singulären Punkte der Kurve $F=0$, $G=0$ sind, die auch für jede Fläche durch die Kurve, die zum Modul gehört, singuläre Stellen sind.

Definition: Es sei $\varrho \leq m$ der größte Wert, für den der Modul \mathfrak{M}_ϱ ein echter Teiler von \mathfrak{M} ist. Dann heißen die Nullstellen von \mathfrak{M}_ϱ singuläre Punkte von \mathfrak{M} , und zwar insbesondere solche Nullstellen von \mathfrak{M}_r ($1 \leq r \leq \varrho$), die nicht Nullstellen von \mathfrak{M}_{r-1} sind, singuläre Punkte r -ter Art.

Satz II. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ ein Primmodul der Mannigfaltigkeit d , so ist $\mathfrak{M}_m = \dots = \mathfrak{M}_{m-d+1} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{m-d} \neq \mathfrak{M}$, also $\varrho = m - d$.

Ist nämlich F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

nach bekannten Sätzen in jeder Nullstelle von \mathfrak{M} den Rang $\leq m - d$, in gewissen Nullstellen genau den Rang $m - d$, so daß nicht alle Determinanten D_{m-d} zu \mathfrak{M} gehören. Dagegen verschwindet jede Determinante D_{m-d+1} in allen Nullstellen von \mathfrak{M} , gehört also zum Modul, da \mathfrak{M} ein Primmodul sein sollte. — Der Satz gestattet eine leichte Verallgemeinerung auf solche Moduln, die kleinstes gemeinsames Vielfaches von mehreren Primmoduln der gleichen Mannigfaltigkeit sind. Dagegen läßt er sich nicht auf solche Moduln ausdehnen, die Gebilde verschiedener Mannigfaltigkeit umfassen. So ist für $\mathfrak{M} = (zx, zy)$ das Gebilde der Nullstellen die Ebene $z=0$ und die Gerade $x=y=0$, also die Mannigfaltigkeit $d=2$, dagegen $\mathfrak{M}_{m-d+1} = \mathfrak{M}_2 = (z^2, zx, zy) \neq \mathfrak{M}$.

Über die singulären Stellen r -ter Art sei im Anschluß daran noch folgendes festgestellt: Es gibt nach Definition für einen solchen Punkt $r-1$ Polynome M_1, \dots, M_{r-1} in \mathfrak{M} , so daß eine bestimmte Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right|$ dort nicht verschwindet. Dann hat das durch $M_1=0, \dots, M_{r-1}=0$ dargestellte Gebilde die Mannigfaltigkeit $m-r+1$ und in dem betreffenden Punkte eine „berührende“ lineare Mannigfaltigkeit derselben Dimension, also einen regulären Punkt. Es gibt also ein Vielfaches von \mathfrak{M} von der Mannigfaltigkeit $m-r+1$, dessen Gebilde in einem singulären Punkte r -ter Art von \mathfrak{M} einen regulären Punkt hat. So gibt es durch einen singulären Punkt zweiter Art einer Raumkurve eine Fläche, die zum Modul gehört und dort regulär ist, während dies für die singulären Punkte erster Art nicht zutrifft, weil dort für jedes Polynom des Moduls alle Ableitungen verschwinden. Als Beispiel sei etwa $\mathfrak{M} = (xy, xz, yz)$

betrachtet, für den der Nullpunkt ein singulärer Punkt erster Art ist; Beispiele für singuläre Punkte zweiter Art bietet jede ebene Kurve mit singulären Punkten, wenn sie als Raumkurve aufgefaßt wird, aber auch die Schnittkurve zweier sich berührender Flächen zweiter Ordnung usw.

Ihr eigentliches Interesse gewinnt nun die Definition der singulären Punkte in der obigen Allgemeinheit erst durch den

Satz III: *Haben zwei Moduln $\mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$ und $\mathfrak{N}(y_1, \dots, y_m)$ der gleichen Variablenzahl mit Koeffizienten in \mathbb{P} isomorphe Restgruppen, so sind auch die Restgruppen der entsprechenden Teiler \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r ($1 \leq r \leq \varrho$) isomorph.*

Zum Beweise seien $f_i(x_1, \dots, x_m)$ und $g_i(y_1, \dots, y_m)$ ($i = 1, \dots, m$) die Polynome der Substitutionen, die nach Satz I den Übergang von \mathfrak{M} zu \mathfrak{N} vermitteln. Ferner sei $T_r(y_1, \dots, y_m)$ eine der Determinante (3) entsprechende Determinante für \mathfrak{N}_r . Dann genügt es nach Satz I für die Isomorphie der Restgruppen \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r von \mathfrak{M}_r und \mathfrak{N}_r zu zeigen, daß

$$(5) \quad \begin{aligned} T_r(f_1, \dots, f_m) &\equiv 0(\mathfrak{M}_r) \\ D_r(g_1, \dots, g_m) &\equiv 0(\mathfrak{N}_r) \end{aligned}$$

ist. Wir beweisen nur die Behauptung (5), da der Beweis der zweiten Behauptung ganz entsprechend verläuft.

Es sei $N(y) = N(y_1, \dots, y_m)$ irgendein Polynom aus \mathfrak{N} ; dann ist nach Satz I

$$N(f) = M$$

ein Polynom von \mathfrak{M} . Daher ist

$$\frac{\partial N}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial N}{\partial f_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = \frac{\partial M}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Wir haben daher für r Polynome N_1, \dots, N_r und die zugehörigen Polynome M_1, \dots, M_r die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial f_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_r}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial N_r}{\partial f_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial M_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M_r}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Bildet man jetzt irgendeine r -reihige Determinante D_r der Matrix rechter Hand, so erhält man linker Hand eine lineare Verbindung von Determinanten $T_r(f_1, \dots, f_m)$, deren Koeffizienten r -reihige Unterdeterminanten der Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ sind. Im ganzen bekommt man $\binom{m}{r}$ solche Gleichungen für die $\binom{m}{r}$ Funktionen $T_r(f)$, deren Koeffizientendeterminante nach bekannten Sätzen eine Potenz von $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$, etwa die λ -te,

ist. Man erhält daher nach diesen Gleichungen durch Multiplikation mit gewissen Polynomen und Addition

$$(6) \quad T_r(f_1, \dots, f_m) \cdot \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^k \equiv 0 (\mathfrak{M}_r)$$

für jede Determinante T_r . Um nun hieraus die Kongruenz (5) schließen zu können, bedarf es noch gewisser Festsetzungen über die Polynome f_i und g_i .

Diese sind nämlich durch unsere bisherigen Festsetzungen noch nicht eindeutig bestimmt, sondern nur ihre Restklassen mod \mathfrak{M} bzw. mod \mathfrak{N} , sollen nun aber noch genauer festgelegt werden. Wir behaupten nämlich den folgenden

Hilfssatz I. Die Polynome $f_i(x)$ der Übergangssubstitutionen von \mathfrak{M} zu \mathfrak{N} lassen sich so bestimmen, daß die Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ an endlich vielen beliebig vorgeschriebenen Nullstellen von \mathfrak{M} stets von Null verschieden ist. Entsprechendes gilt von den Polynomen $g_i(y)$.

Es sei $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine Nullstelle von \mathfrak{M} . Setzen wir

$$(7) \quad f_i(\alpha) = \beta_i,$$

so ist wegen (2) auch $g_i(\beta) = \alpha_i$, und wegen (1) ist $N(\beta) = 0$ für jedes N aus \mathfrak{N} . Die beiden Nullstellen α und β von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} sind also umkehrbar eindeutig einander zugeordnet. Wir entwickeln jetzt die Polynome $f_i(x)$ nach Potenzen von $x_i - \alpha_i$ und bezeichnen mit A die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_\alpha$ der Koeffizienten der linearen Bestandteile. Wegen (2) gehört das Polynom

$$x_i - g_i(f_1, \dots, f_m) = M_i$$

zu \mathfrak{M} .

Aus dieser Gleichung folgt durch Differentiation nach x :

$$\delta_{ij} - \sum_k \frac{\partial g_i}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial M_i}{\partial x_j}$$

und daraus folgt wegen (7) durch Einführung des Wertsystems $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, wenn wir mit B die Matrix $\left(\frac{\partial g_i(y)}{\partial y_k} \right)_\beta$ bezeichnen, daß die Matrix

$$(8) \quad E - BA = U$$

die Koeffizientenmatrix der linearen Bestandteile der nach Potenzen von $x_i - \alpha_i$ umgeordneten Polynome M_i ist. Wir wählen nun eine Zahl λ so, daß die Determinanten $|A + \lambda E|$ und $|E + \lambda B|$ beide von Null verschieden sind. Dann ist $|A + \lambda(E + \lambda B)^{-1}U| \neq 0$, weil nach (8)

$$|A + \lambda BA + \lambda U| = |A + \lambda E|,$$

also nach Voraussetzung $\neq 0$ ist. Hieraus folgt, falls jetzt F_1, \dots, F_k eine

Basis von \mathfrak{M} bilden, die Existenz von gewissen Konstanten $c_{i\mu}$, so daß die Determinante der Koeffizienten der linearen Bestandteile von

$f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu}$, also die Determinante $\left| \frac{\partial \left(f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu} \right)}{\partial x_j} \right|$ an der Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, von Null verschieden ist.

Sind nun mehrere solche Stellen (α) vorgegeben, so läßt sich für jede ein entsprechendes System von Konstanten c bestimmen; anders ausgedrückt: Die Funktionen

$\left| \frac{\partial \left(f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu} \right)}{\partial x_j} \right|$ von $c_{i\mu}$, die entstehen, indem

man für x_1, \dots, x_m die betreffenden Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ einsetzt, verschwinden sämtlich nicht identisch. Es gibt daher nach einem bekannten Satze ein *Wertsystem* $c_{i\mu}$ im Körper P , für das sämtliche Funktionen $\neq 0$ sind.

Bezeichnet man nun $f_i + \sum_{\mu} c_{i\mu} F_{\mu}$ für dieses Wertsystem selbst mit f_i ,

so ist die Determinante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ an sämtlichen vorgeschriebenen Stellen $\neq 0$ und der Hilfssatz ist zur ersten Hälfte bewiesen. Da man aber auf analoge Weise und unabhängig von der Bestimmung der f_i auch die Polynome g_i durch andere Polynome derselben Restklassen ersetzen kann, so daß die entsprechende Aussage gilt, so gilt der Hilfssatz ganz.

Um nun mit seiner Hilfe den Satz III zu beweisen, wenden wir auf den Modul \mathfrak{M}_r die Laskersche Zerlegung in primäre Moduln an, wonach \mathfrak{M}_r kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen primären Moduln mit Koeffizienten in P ist⁴⁾. Zu jedem dieser Teiler gehört ein irreduzibles Gebilde, deren Gesamtheit das Gebilde von \mathfrak{M}_r ausmacht⁵⁾. Wir wählen nun auf jedem irreduziblen Gebilde einen Punkt und bestimmen die Funktionen f_i nach Hilfssatz I so, daß $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ in keinem dieser Punkte verschwindet. Dann gilt dasselbe von $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^k$; keine Potenz dieses Polynoms gehört also zu einem der Primärteiler von \mathfrak{M}_r . Weil nun nach (6) das Produkt $T_r(f) \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|^k$ zu \mathfrak{M}_r , also zu jedem primären Teiler gehört, so muß nach der Definition der primären Moduln der Faktor $T_r(f)$ zu jedem dieser Teiler, also zu \mathfrak{M}_r selbst gehören, womit die Behauptung (5) und damit Satz III bewiesen ist.

Der Satz kann auch so aufgefaßt werden, daß die *Restgruppen*

⁴⁾ Ein Primärmodul ist ein solcher, für den ein Produkt von zwei Polynomen, die beide $\not\equiv 0$ sind, nur dann $\equiv 0$ sein kann, wenn für beide eine Potenz $\equiv 0$ ist.

⁵⁾ Sollte keine Nullstelle von \mathfrak{M}_r existieren, also $\mathfrak{M}_r = 1$ sein, so ist die Behauptung (5) trivial.

$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_p$ der Moduln $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$ der Restgruppe \mathfrak{A} in bezug auf die Variablenzahl m zugeordnet sind; sie bilden eine Kette von wohlbestimmten, ineinander geschachtelten Untergruppen von \mathfrak{A} , die wegen ihrer Beziehung zu den Singularitäten von \mathfrak{M} die „Singularitätengruppen von \mathfrak{A} in bezug auf m “ heißen mögen.

Zur Vereinfachung der Berechnung der Singularitätengruppen dient der folgende

Satz IV. Ist die Restgruppe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gilt für die Singularitätengruppen $\mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}_r, \mathfrak{C}_r$ in bezug auf m die Beziehung $\mathfrak{C}_r = \mathfrak{A}_r + \mathfrak{B}_r$.

Sind $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}$ die zu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gehörenden Moduln, so ist $\mathfrak{R} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ (vgl. Satz III meiner in der Einleitung genannten Arbeit), und die Moduln \mathfrak{M} und \mathfrak{N} sind teilerfremd. Es besteht daher eine Relation $M_0 + N_0 = 1$, wobei M_0 zu \mathfrak{M} , N_0 zu \mathfrak{N} gehört.

Es sei ferner F_1, \dots, F_k eine Basis von \mathfrak{M} , G_1, \dots, G_l eine Basis von \mathfrak{N} . Dann ist nach einem bekannten Satze $F_1 G_1, \dots, F_k G_l$ eine Basis von \mathfrak{R} . Für jedes $r \leq m$ bilden also $F_i G_j$ und die r -reihigen Determinanten $\left| \frac{\partial(F_i G_j)}{\partial x_{r_1}} \right|$ eine Basis von \mathfrak{R}_r . Andererseits bilden die Polynome

$F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_1}} \right|, \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_1}} \right| G_j, \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_1}} \right| \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_1}} \right|, F_i G_j$ eine Basis von $[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$. Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{R}_r \equiv 0[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$.

In der Tat kann man in der Entwicklung der Determinante $\left| \frac{\partial(F_i G_j)}{\partial x_{r_1}} \right| = \left| F_i \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_1}} + G_j \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_1}} \right|$ die Glieder, bei denen nur der vordere Summand jedes Elements berücksichtigt ist, als Vielfaches von $F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_1}} \right|$, ebenso diejenigen, bei denen nur der hintere Summand berücksichtigt ist, als Vielfaches von $G_j \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_1}} \right|$ außer Betracht lassen. Die übrigen Glieder enthalten aber sämtlich mindestens einen Faktor F und einen Faktor G , sind also ebenfalls $\equiv 0[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r]$.

Wir haben nun noch umgekehrt $[\mathfrak{M}_r, \mathfrak{N}_r] \equiv 0(\mathfrak{R}_r)$ zu zeigen. Aus der Relation der Teilerfremdheit $M_0 + N_0 = 1$ folgt für jedes $N \equiv 0(\mathfrak{R})$

$$(9) \quad \frac{\partial N}{\partial x_1} = \frac{\partial(N M_0)}{\partial x_1} - N \frac{\partial M_0}{\partial x_1} + N_0 \frac{\partial N}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial(N M_0)}{\partial x_1}(\mathfrak{R})$$

Bildet man nun $F_i \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_1}} \right|$ und setzt für jedes Element den Ausdruck (9) ein, so wird das Resultat $\equiv F_i \left| \frac{\partial(G_j M_0)}{\partial x_{r_1}} \right|$, also $\equiv 0(\mathfrak{R}_r)$. Ebenso wird $G_j \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_1}} \right| \equiv 0(\mathfrak{R}_r)$.

Entsprechend behandeln wir das Produkt $\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_{r_i}} \right| \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_{r_j}} \right|$, indem wir neben (9) die entsprechende Relation für irgendein $M \equiv 0(\mathfrak{M})$ benutzen:

$$\frac{\partial M}{\partial x_\mu} = \frac{\partial (MN_0)}{\partial x_\mu} - M_0 \frac{\partial N_0}{\partial x_\mu} + M_0 \frac{\partial M}{\partial x_\mu} \equiv \frac{\partial (MN_0)}{\partial x_\mu} (\mathfrak{M}).$$

Jede Determinante wird dann $\equiv \left| \frac{\partial (F_i N_0)}{\partial x_{r_i}} \right| (\mathfrak{M})$ bzw. $\equiv \left| \frac{\partial (G_j M_0)}{\partial x_{r_j}} \right| (\mathfrak{M})$, das Produkt also $\equiv 0(\mathfrak{R}_r)$.

Hiermit ist Satz IV bewiesen.

§ 2.

Folgerungen und Beispiele.

Der vorliegende Paragraph soll vor allem von dem Fall eingliedriger Moduln, speziell von ebenen Kurven handeln. Vorher zeigen wir noch allgemein den

Hilfssatz II. *Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine Nullstelle des Moduls $\mathfrak{P}(x_1, \dots, x_m)$ in einem algebraisch abgeschlossenen Bereich P und ordnet man alle Polynome von \mathfrak{P} nach $x_i - \alpha_i$ um, wobei der niedrigste auftretende Untergrad^{*)} $k \geq 2$ ist, so ist jedes System \mathfrak{P}_x von allen Unterformen x -ten Grades von \mathfrak{P} linear verwandt mit dem entsprechenden System Ω_x eines Moduls $\Omega(y_1, \dots, y_m)$ derselben Variablenzahl und isomorpher Restgruppe, gebildet für die entsprechende Nullstelle β_1, \dots, β_m . Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und daher auch β_1, \dots, β_m eine isolierte Nullstelle, so gilt der Satz auch für $k=1$ und $x=1$.*

Zum Beweise sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$. Dann ist für die Übergangssubstitutionen f_i und g_i nach (2)

$$x_i - g_i(f_1, \dots, f_m) = P$$

zu \mathfrak{P} gehörig; also sind für $k \geq 2$ die linearen Bestandteile links $= 0$. Daraus folgt für die Matrizen A und B dieser Bestandteile $E = BA$. Nun ist nach (1) $\mathfrak{P}(g_1, \dots, g_m)$ zu Ω gehörig; also entsteht durch lineare Substitution mit der Matrix B aus jeder Form von \mathfrak{P}_x eine solche von Ω_x und durch die reziproke Substitution aus jeder Form von Ω_x eine solche von \mathfrak{P}_x . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist jetzt $k=1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine isolierte Nullstelle, so sei zunächst die Restgruppe von \mathfrak{P} entweder selbst von endlicher Ordnung (also \mathfrak{P} ein Punktmodul) oder reduzibel in zwei Bestandteile, deren einer von endlicher Ordnung ist und zu der Nullstelle $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gehört. Fügt man

^{*)} D. h. der Grad des niedrigsten homogenen Bestandteils. Diesen selbst bezeichnen wir als die „Unterform“.

die Haupteinheit des zweiten Bestandteils dem Modul \mathfrak{P} hinzu, so erhält man den zugehörigen primären Punktmodul. Daher gibt es in diesem Falle ein Polynom A , das im Punkte $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ verschwindet, so daß (\mathfrak{P}, A) eine endliche Restgruppe hat. Ist wieder $\alpha_i = 0$, so ist der Untergrad von A mindestens 1, und ferner gibt es nach dem Gesagten ein Polynom A' , so daß

$$(10) \quad A + A' \equiv 1(\mathfrak{P}),$$

$$(11) \quad AA' \equiv 0(\mathfrak{P})$$

ist. Nach (10) hat A' das konstante Glied 1, also AA' dieselbe Unterform wie A , die also nach (11) zu \mathfrak{P}_1 gehört. Die Anzahl der linear unabhängigen Formen von \mathfrak{P}_1 ist daher dieselbe auch für den Modul (\mathfrak{P}, A) , und Entsprechendes gilt für \mathfrak{Q}_1 in bezug auf einen analog gebildeten Modul (\mathfrak{Q}, B) , dessen Restgruppe zu der von (\mathfrak{P}, A) erzeugten endlichen irreduziblen Gruppe isomorph ist. Für eine solche ist aber die fragliche Anzahl $= m - r_1$, wo r_1 die erste Hilbertsche Invariante der Gruppe ist⁷⁾. Beide Anzahlen stimmen also überein und der Beweis ist erbracht. — Im allgemeinen Falle betrachtet man ähnlich einen geeigneten Teiler (\mathfrak{P}, A) , wodurch die Mannigfaltigkeit des Gebildes von \mathfrak{P} um 1 erniedrigt und der Satz durch Induktion auf den soeben erledigten Fall des Punktmoduls zurückgeführt wird.

Satz V. Ist $\mathfrak{M} = (M(x_1, \dots, x_m))$ ein eingliedriger Modul, für den $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ eine k -fache isolierte Singularität ist, ist ferner nach homogenen Bestandteilen von $x_i - \alpha_i$ geordnet

$$M = M_k + M_{k+1} + \dots,$$

so ist für jeden eingliedrigen Modul $\mathfrak{N} = (N(y_1, \dots, y_m))$ derselben Variablenzahl, dessen Singularitätengruppe zu der von \mathfrak{M} isomorph ist, die zu M_k entsprechende Form N_k von demselben Grade k und hat eine linear verwandte Schar der ersten Polaren.

Zunächst ist wegen der Eingliedrigkeit $g = 1$, so daß nur eine Singularitätengruppe in Frage kommt. Infolge der Isomorphie von \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{N}_1 sind die singulären Punkte von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} einander zugeordnet. Wir betrachten zwei isolierte Singularitäten, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Nullpunkt des x - bzw. y -Raumes legen.

Ist jetzt erstens $k > 2$, so ist für \mathfrak{M}_1 der kleinste Untergrad ≥ 2 , also nach Hilfssatz II das durch $\frac{\partial M_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial M_k}{\partial x_m}$ linear erzeugte System linear verwandt mit dem entsprechenden System von \mathfrak{N}_1 . Hieraus folgt die Invarianz von k und die Behauptung des Satzes.

⁷⁾ Vgl. meine Arbeit Zur Theorie der primären Punktmoduln [Mathematische Annalen 79 (1918), S. 56–75], Satz III.

Ist aber $k = 2$, so ist nach Hilfssatz II der Rang von M_k invariant, da er gleich der Anzahl der linear unabhängigen linearen Unterformen von \mathfrak{M}_1 ist.

Insbesondere ergibt sich für $m = 2$, wenn man in der Zerlegung von M_k in irreduzible Faktoren die Exponenten als Vielfachheiten der betreffenden Tangente bezeichnet:

Sind für zwei ebene Kurven die Singularitätengruppen isomorph, so stimmt in je zwei zugeordneten singulären Punkten die Vielfachheit der Punkte, die Anzahl der verschiedenen Tangenten und die Vielfachheit einer jeden entsprechend überein.

Insbesondere gilt dies nach Satz III auch, wenn die Restgruppen der beiden Kurven selbst isomorph sind. Das Verhalten der weiteren, von M. Noether zur Charakterisierung der Singularitäten eingeführten Vielfachheitsanzahlen zur Singularitätengruppe mag einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Als einfache Folgerung von Satz V sei hier z. B. erwähnt, daß ein nicht zerfallender Kegelschnitt, eine Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt im Endlichen und eine Kurve 3. Ordnung mit Spitze im Endlichen je Restgruppen erzeugen, die nicht isomorph sein können, daß also, trotzdem alle drei Kurven rational sind, keine beiderseits ganz rationale Abbildung von einer auf die andere existiert.

(Angenommen 25. 1. 1920.)

Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems¹⁾.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I.

Einleitung.

I. Die Stieltjessche Theorie.

II. Die Erweiterung der Problemstellung und Fortführung der Theorie.

Kapitel I. Algebraische Untersuchungen.

- § 1. Der assoziierte Kettenbruch.
- § 2. Die verallgemeinerten Näherungsbrüche und der korrespondierende Kettenbruch.
- § 3. Eigentlich und uneigentlich definite quadratische Formen.
- § 4. Eine spezielle Transformation von Potenzreihe und Kettenbruch.

Kapitel II. Existenzsatz für das Momentenproblem.

- § 5. Formulierungen des Momentenproblems.
- § 6. Belegungen endlicher Ordnung.
- § 7. Das Grommersche Auswahltheorem.
- § 8. Die Lösung des Momentenproblems.
- § 9. Die vollständige Konvergenz des assoziierten Kettenbruchs.

Kapitel III. Kriterien für die Bestimmtheit des Momentenproblems und die Konvergenz der zugehörigen Kettenbrüche.

- § 10. Das einer uneigentlich definiten Form zugeordnete Momentenproblem.
- § 11. Hilfsätze über Belegungen endlicher Ordnung.

¹⁾ Vgl. die vorläufige Mitteilung gleichen Titels des Verfassers, die in den Sitzungsberichten der Kgl. Bayer. Ak. d. Wiss. Math.-Phys. Klasse, Jahrgang 1919, S. 381–393 erschienen ist.

- § 12. Ein funktionentheoretischer Hilfssatz.
 § 13. Die Folge der korrespondierenden Näherungsbrüche ungerader Ordnung.

Teil II.

- § 14. Die Polynome $G_n(z)$ und $H_n(z)$.
 § 15. Hilfsbetrachtungen über konvergente Folgen von Näherungsbrüchen gerader Ordnung.
 § 16. Die Folge der Polynome $G_n(z)$ und $H_n(z)$. Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems.
 § 17. Die einfache Konvergenz des assoziierten und korrespondierenden Kettenbruchs.

Teil III.

- § 18. Die meromorphe Funktion $\frac{g(z) + \tau r(z)}{h(z) + \tau s(z)}$.
 § 19. Ein weiteres Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems.

Teil I.

Die Problemstellungen und Sätze der Abhandlung, von der hier der erste Teil vorgelegt wird — zwei weitere kürzere werden später erscheinen — sind aus einer Erweiterung und Fortführung der Stieltjesschen Theorie²⁾ hervorgegangen. Indessen hat der Verfasser seine Darstellung nicht unmittelbar an die Stieltjessche Arbeit angeschlossen und auch deren Kenntnis nicht vorausgesetzt; er hat vielmehr Wert darauf gelegt, nicht nur dem genauen Kenner der Theorie der Kettenbrüche, sondern jedem Mathematiker verständlich zu sein. Im übrigen findet der Leser in der Einleitung eine Zusammenstellung der Stieltjesschen Sätze mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit.

Einleitung.

I. Die Stieltjessche Theorie.

1. Die Stieltjessche Abhandlung ist dem Studium der Kettenbrüche von der Gestalt

$$(1) \quad S(z) = \frac{1}{a_1 z} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z} + \frac{1}{a_4} + \dots$$

²⁾ T. J. Stieltjes, „Recherches sur les fractions continues“, Ann. de la fac. des sc. de Toulouse 8 (1894), S. J. 1–122, 9 (1895), S. A. 1–47 (im folgenden kurz mit Stieltjes 8 und 9 zitiert).

gewidmet. Bildet man mit Hilfe der Rekursionsformeln, die aus dem Kettenbruch $S(z)$ hervorgehen³⁾, seinen Näherungsbruch m -ter Ordnung $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$, so ergibt sich unmittelbar aus der Gestalt dieser Rekursionsformeln, daß Zähler und Nenner des Näherungsbruches Polynome in z sind, und zwar sind $P_{2n}(z)$ und $P_{2n-1}(z)$ Polynome vom Grade $n-1$, $Q_{2n}(z)$ und $Q_{2n-1}(z)$ Polynome vom Grade n . Außerdem ist

$$Q_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n-1}(0) = 1, \quad Q_{2n}(0) = 1.$$

Der Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ läßt sich ferner in eine Potenzreihe

$$(2) \quad \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{c_0^{(m)}}{z} - \frac{c_1^{(m)}}{z^2} + \frac{c_2^{(m)}}{z^3} - \dots$$

entwickeln, die für alle Werte von z von hinreichend großem absoluten Betrage konvergiert.

Vergleicht man die Potenzreihenentwicklung zweier verschiedener Näherungsbrüche $\frac{P_{m+p}(z)}{Q_{m+p}(z)}$ und $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$, so ergibt sich für alle $p > 0$, sowie für $v = 0, 1, \dots, m-1$

$$c_v^{(m)} = c_v^{(m+p)}.$$

Daher gelingt es, dem Kettenbruch $S(z)$ eine Potenzreihe der Form

$$(3) \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

zuzuordnen, die mit dem Kettenbruch $S(z)$ durch die Beziehungen

$$(4) \quad c_v = c_v^{(m)} \quad (\text{für } v = 0, 1, \dots, m-1)$$

verknüpft ist⁴⁾.

Über die Konvergenzeigenschaften der so gewonnenen Potenzreihe lassen sich keine allgemeinen Aussagen machen. Im Gegenteil zeigt sich, daß im allgemeinsten Falle die Potenzreihe für jeden Wert von z von noch so großem absoluten Betrage divergiert.

Bildet man aus den Koeffizienten c_v der Potenzreihe (3) die Hankelschen Determinanten

$$C_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-2} \end{vmatrix}, \quad B_m = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix},$$

³⁾ Stieltjes § 8, S. 9. — Vgl. auch O. Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen“, Leipzig 1918, S. 5 (im folgenden kurz mit Perron, Lehrbuch zitiert).

⁴⁾ Stieltjes § 8, S. 18–19, vgl. auch Perron, Lehrbuch S. 301–307 und S. 375.

so ergibt sich, daß die Determinanten B_m und C_m für jeden Wert des Index m von Null verschieden sind.

Ist umgekehrt eine beliebige formale Potenzreihe $\mathfrak{P}(\frac{1}{z})$ der Gestalt (3) vorgelegt, deren Koeffizientendeterminanten C_m und B_m für alle m von Null verschieden sind, so läßt sich aus dieser Potenzreihe durch ein Divisionsverfahren ein Kettenbruch $S(z)$ der Gestalt (1) herleiten. Bildet man dessen Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ und entwickelt ihn in die Potenzreihe (2), so bestehen zwischen ihren Koeffizienten $c_r^{(m)}$ und den Koeffizienten c_r der vorgelegten Potenzreihe $\mathfrak{P}(\frac{1}{z})$ die Gleichungen (4).

Hiermit ist eine wechselseitige Beziehung zwischen Kettenbruch und Potenzreihe nachgewiesen; wir wollen daher nach Herrn Perron Potenzreihe und Kettenbruch miteinander korrespondierend nennen.

2. Ersetzt man die Voraussetzungen $C_m \neq 0$, $B_m \neq 0$ durch die schärfere $C_m > 0$, $B_m \neq 0$ für alle m , so erhält man einen Kettenbruch $S(z)$, dessen Koeffizienten a_{2n+1} sämtlich positiv sind.

Umgekehrt folgt aus

$$a_{2n+1} > 0 \quad \text{für alle } n,$$

daß auch die Koeffizientendeterminanten C_m der korrespondierenden Potenzreihe sämtlich größer sind als Null.

In diesem Falle sind ferner die Nullstellen der Polynome $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ sämtlich einfach und reell, und es gelten die Partialbruchzerlegungen

$$(5) \quad \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{N_r^{(n)}}{z + \lambda_r^{(n)}}, \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M_0^{(n)}}{z} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{M_r^{(n)}}{z + \omega_r^{(n)}},$$

wobei die Zähler $M_r^{(n)}$ und $N_r^{(n)}$ sämtlich > 0 und die $\omega_r^{(n)}$, $\lambda_r^{(n)} \neq 0$ sind. (Vgl. Satz III des § 1 und Abschnitt 5 des § 2.)

Stieltjes setzt bei seinen Untersuchungen außerdem noch

$$B_m > 0 \quad \text{für alle } m$$

voraus, was mit der Voraussetzung

$$a_{2n} > 0 \quad \text{für alle } n$$

oder auch mit der Voraussetzung

$$\omega_r^{(n)} > 0, \quad \lambda_r^{(n)} > 0 \quad \text{für alle } n \text{ und } r^5)$$

gleichbedeutend ist.

⁵⁾ Stieltjes 8, S. 10–12.

3. Durch passende Erweiterung bekannter Sternscher Konvergenzkriterien für Kettenbrüche*) beweist Stieltjes:

I. Divergiert die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, so konvergiert der Kettenbruch $S(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält, gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$, obgleich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche, jeder einzeln für sich betrachtet, divergieren.

II. Konvergiert die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, so konvergieren die vier Folgen von Polynomen $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der z -Ebene gleichmäßig gegen ganze transzendente Funktionen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}(z) &= p(z), & \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n-1}(z) &= r(z) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n}(z) &= q(z), & \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n-1}(z) &= s(z). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$(6) \quad r(z)q(z) - s(z)p(z) = 1.$$

Es konvergiert demnach sowohl die Folge der geraden als auch die der ungeraden Näherungsbrüche jede für sich, aber (wegen (6)) gegen die voneinander verschiedenen Funktionen

$$f_1(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad f_2(z) = \frac{r(z)}{s(z)}.$$

Der Kettenbruch divergiert also.

4. Durch Grenzübergang gelangt Stieltjes von der Partialbruchzerlegung (5) der Näherungsbrüche zu einer fundamentalen Integraldarstellung der Grenzfunktionen $f(z)$, bzw. $f_1(z)$, $f_2(z)$, und zwar erhält er: im Falle I

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = f(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} \gamma,$$

im Falle II

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = f_2(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}.$$

*) M. A. Stern, Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruches, Journ. für Math. 37 (1848), S. 255–272. Stieltjes 8, S. 30–39 und S. 61–65. Perron, Lehrbuch, S. 294–295.

†) Eine ausführliche Darstellung des Stieltjeschen Integralbegriffs siehe Stieltjes 8, S. 68–71, Perron, Lehrb., S. 362–374. — Der zitierte Satz findet sich bei Stieltjes 8, S. 76–90; Perron, Lehrb., S. 402–410.

Hierbei bedeuten $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ im Intervall $0 \leq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktionen, und die Integrale sind Stieltjessche.

Es gelten ferner die sogenannten Momentengleichungen: im Falle I

$$(9) \quad c_r = \int_0^\infty u^r d\varphi(u) \quad ^9),$$

im Falle II

$$c_r = \int_0^\infty u^r d\varphi_1(u) = \int_0^\infty u^r d\varphi_2(u).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß die Funktionen $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ der Formeln (7) und (8) durch die Potenzreihe (3) asymptotisch dargestellt werden⁹⁾.

5. Das Problem, zu einer vorgelegten Folge von Koeffizienten c_r eine im Intervall $0 \leq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ zu finden, die den Gleichungen (9) genügt, nennt Stieltjes das Momentenproblem. Man findet leicht als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Momentenproblems, daß die zugehörigen Koeffizientendeterminanten C_m und B_m sämtlich > 0 sein müssen¹⁰⁾.

Durch die bisher angegebenen Sätze ist aber auch bewiesen, daß, wenn die aus den vorgegebenen Koeffizienten c_r gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv sind, das Momentenproblem immer mindestens eine Lösung besitzt, die durch Grenzübergang aus dem Kettenbruch (1) gewonnen wird.

Stieltjes beweist ferner, daß im Falle I außer der durch den Grenzübergang (7) gewonnenen Funktion $\varphi(u)$ keine weitere Lösung des Momentenproblems existiert¹¹⁾. Im Falle II gibt es außer den Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ der Formeln (8) noch unendlich viele andere Lösungen des Problems. Im Falle I nennt Stieltjes das Momentenproblem bestimmt, im Falle II unbestimmt.

II.

Erweiterung der Problemstellung und Fortführung der Theorie.

6. In der vorliegenden Arbeit werden wir zu einer Erweiterung der Stieltjesschen Problemstellung geführt, indem wir die Voraussetzung $B_m > 0$ fallen lassen; wir verzichten damit also auf $\alpha_{2m} > 0$, $\omega_r^{(n)} > 0$, $\lambda_r^{(n)} > 0$; behalten aber die Voraussetzung $C_m > 0$ für alle m bei und damit auch

⁹⁾ Stieltjes 8, S. 92–93; Perron, Lehrbuch, S. 410–411.

¹⁰⁾ Stieltjes 8, S. 35; Perron, Lehrbuch, S. 413.

¹¹⁾ Stieltjes 8, S. 42–49; Perron, Lehrbuch, S. 377–378.

¹²⁾ Stieltjes 8, S. 97–104; Perron, Lehrbuch, S. 390–391 und S. 417.

die Beziehungen $a_{2n+1} > 0$ und die Partialbruchzerlegungen (5) mit reellen $\omega_v^{(n)}$, $\lambda_v^{(n)}$ und positiven $M_v^{(n)}$, $N_v^{(n)}$.

Über den Fall $C_m > 0$, $B_m \geq 0$ war bisher außer einem Satz des Herrn Grommer¹²⁾ nichts bekannt. Dieser Satz, der für unsere weiteren Untersuchungen ein wichtiges Hilfsmittel liefert, lautet:

Es läßt sich aus der Folge der Näherungsbrüche $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ eine unendliche Teilfolge $\frac{P_{n_h}(z)}{Q_{n_h}(z)}$ derart auswählen, daß sie in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, mit wachsendem h gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$ konvergiert; wobei sich $f(z)$ wieder durch ein Stieltjesches Integral darstellen läßt.

Doch erstreckt sich dieses Integral in Anbetracht, daß jetzt die Näherungsbrüche auch für positive Werte von z Pole haben können, von $-\infty$ bis $+\infty$. Es ergibt sich also

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n_h}(z)}{Q_{n_h}(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

wo $\varphi(u)$ eine im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktion bedeutet.

Es läßt sich zunächst zeigen, daß die Integrale

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\varphi(u)$$

für alle ganzzahligen nicht negativen Werte von v existieren und gleich c_v werden; demzufolge wird die Funktion $f(z)$ der Formel (10) durch die Potenzreihe (3) asymptotisch dargestellt. Das besagt aber:

Das Momentenproblem — wobei die Momente jetzt die allgemeinere Gestalt (11) annehmen — besitzt immer mindestens eine Lösung, wenn die Determinanten C_m sämtlich positiv und die Determinanten B_m sämtlich von Null verschieden sind.

Die Konvergenz der Integrale (11) wird hier zum erstenmal bewiesen (vgl. Satz IX, § 5 und Satz XIII, § 8).

¹²⁾ Jakob Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Diss. Göttingen 1914, abgedr. im Journ. f. r. u. angew. Mathematik 144 (1914), S. 140–166; vgl. insbes. S. 137 ff.

Das Grommersche Auswahlverfahren läßt sich übrigens durch Anwendung eines viel allgemeineren elementaren Satzes über unendliche Folgen gleichmäßig beschränkter monotoner Funktionen von Herrn Carathéodory ganz wesentlich vereinfachen (vgl. § 7, Abschnitt 1, insbesondere Anm. ²²⁾).

Daß die Bedingung $C_m > 0$ für die Lösbarkeit des Momentenproblems in seiner neuen Gestalt auch notwendig ist, ist leicht einzusehen (vgl. Satz X, § 5).

7. Es bleibt noch übrig, die Frage nach der Bestimmtheit des Momentenproblems im Zusammenhang mit dem Problem der Konvergenz des Kettenbruchs $S(z)$ zu untersuchen. Während sich im Stieltjesschen Falle die Konvergenzeigenschaften des Kettenbruchs $S(z)$ direkt angeben lassen und man dann aus der Konvergenz (Divergenz) von $S(z)$ auf die Bestimmtheit (Unbestimmtheit) des Momentenproblems (9) schließt, werden im Falle $B_m \geq 0$ die Konvergenzeigenschaften von $S(z)$ erst aufgeklärt, wenn über die Bestimmtheit oder Unbestimmtheit des Momentenproblems (11) entschieden ist.

Im folgenden soll ein Kettenbruch kurz als konvergent bezeichnet werden, wenn er in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, gleichmäßig konvergiert; in allen andern Fällen soll er divergent heißen.

Es gilt nun das folgende Theorem: *Man setze*

$$\sigma_n = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}.$$

I'. Das Momentenproblem (11) ist bestimmt, wenn mindestens eine der beiden Reihen

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \sigma_n^2$$

divergiert.

II'. Konvergieren beide Reihen (12), so ist das Momentenproblem unbestimmt.

Im Falle I' ist der Kettenbruch konvergent, das heißt, es ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

während $P_m(z)$ und $Q_m(z)$, für sich genommen, nicht konvergieren.

Im Falle II' existieren in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der z -Ebene gleichmäßig die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n-1}(z) = r(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2n-1}(z) = s(z),$$

wo $r(z)$ und $s(z)$ ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen sind.

Die Grenzwerte von Zähler und Nenner der Näherungsbrüche gerader Ordnung existieren im allgemeinen Falle nicht. Trotzdem gelingt es, die

Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ so aufzuspalten, daß ihre Konvergenzeigenschaften klar hervortreten. Setzt man nämlich

$$P_{2n}(z) = G_n(z) + \sigma_n P_{2n+1}(z), \quad Q_{2n}(z) = H_n(z) + \sigma_n Q_{2n+1}(z),$$

so konvergieren im Falle II' die Polynome $G_n(z)$ und $H_n(z)$ gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der z -Ebene mit wachsendem n gegen ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen; es ergibt sich also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z) = g(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) = h(z).$$

Außerdem besteht zwischen den vier ganzen transzendenten Funktionen $r(z)$, $s(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ in Analogie zu (6) die Beziehung

$$r(z) h(z) - s(z) g(z) = 1.$$

Die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ konvergieren mithin einzeln im Falle II' dann und nur dann, wenn ein endlicher Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ existiert.

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \infty$, das heißt, besitzt die Menge der Zahlen σ_n keinen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt, so wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{r(z)}{s(z)},$$

dann und nur dann ist also der Kettenbruch $S(z)$ konvergent für den Fall, daß das zugehörige Momentenproblem (11) unbestimmt ist.

Wenn alle $B_m > 0$, $a_{2n} > 0$, die Reihen (12) beide konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = \infty$ ist, so ist nach den Stieltjeschen Sätzen I das Momentenproblem (9) bestimmt, das Momentenproblem (11) nach den Sätzen II' unbestimmt.

8. Eine fast noch größere Rolle als der Kettenbruch der Gestalt (1) spielt in der mathematischen Literatur der Kettenbruch¹³⁾

$$(13) \quad K(z) = \frac{k_1}{z+l_1} + \frac{k_2}{z+l_2} + \dots,$$

wo die l , reell (auch Null), die k , reell, aber nicht Null sind. Der Kettenbruch (13) wird aus der Potenzreihe (3) durch ein dem Euklidischen Algorithmus nachgebildetes Divisionsverfahren gewonnen. Er hat vor dem Kettenbruch (1) voraus, daß er nicht an die Bedingung $B_m \neq 0$ gebunden ist, sondern immer dann und nur dann existiert, wenn sämtliche Determinanten $C_m \neq 0$ sind.

¹³⁾ Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 322–326 u. S. 376.

Dann und nur dann, wenn für alle m die Determinante $C_m > 0$ ist, wird $k_v < 0$ für alle $v \geq 2$, $k_1 > 0$. Mit dem Kettenbruch (1), falls dieser existiert, hängt er durch die Beziehung

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{P_{n,n}(z)}{Q_{n,n}(z)}$$

zusammen, wenn mit $K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)}$ der Näherungsbruch n -ter Ordnung von $K(z)$ bezeichnet wird.

Die Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche $K_n(z)$ dient zunächst dazu, eine Lösung des Momentenproblems auch für den Fall zu konstruieren, daß einige der Determinanten B_m verschwinden.

Außer den Näherungsbrüchen $K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)}$ betrachten wir auch die Quotienten

$$K_n(z; t) = \frac{U_n(z) + tU_{n-1}(z)}{V_n(z) + tV_{n-1}(z)} = \frac{k_1}{z + l_1} + \dots + \frac{k_{n-1}}{z + l_{n-1}} + \frac{k_n}{z + l_n + t} \quad (4),$$

wobei t einen reellen Parameter bedeutet, und nennen $K_n(z; t)$ einen verallgemeinerten Näherungsbruch n -ter Ordnung von $K(z)$. Wir sagen ferner: Der Kettenbruch $K(z)$ konvergiert vollständig gegen die Funktion $f(z)$, wenn zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen positiven Zahl ε und zu jedem abgeschlossenen Bereich \mathfrak{B} , der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, sich eine Zahl $N = N(\varepsilon, \mathfrak{B})$ bestimmen läßt; wobei für alle $n \geq N$, gleichmäßig für alle Punkte z von \mathfrak{B} und alle reellen Werte von t

$$|K_n(z; t) - f(z)| \leq \varepsilon$$

wird.

Nunmehr zeigt sich, daß das Momentenproblem dann und nur dann bestimmt ist, wenn der Kettenbruch $K(z)$ vollständig konvergent ist.

Setzt man unter Benutzung einer bekannten Fundamentalformel der Kettenbruchtheorie

$$A_{n-1} = V_{n-1}(0) U_n(0) - V_n(0) U_{n-1}(0) = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \dots k_n,$$

so lassen sich die Polynome $P_{n,n-1}(z)$, $Q_{n,n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ mit Hilfe der Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ durch die Formeln definieren:

²⁴⁾ Diese bequeme Schreibweise für einen Kettenbruch ist von Herrn Pringsheim eingeführt worden. Vgl. A. Pringsheim, Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Sitzungaber. der kgl. Bayer. Ak. d. Wiss. Math.-phys. Kl. 28 (1898), S. 295 bis 324. Vgl. insbesondere S. 296.

Der Parameter t ist bereits von Stieltjes, allerdings nur in die Näherungsbrüche von $S(z)$ eingeführt worden, um eine spezielle Aufgabe zu lösen. Vgl. Stieltjes 9, S. 14–22.

$$(14) \quad \begin{cases} P_{2n-1}(z) = \frac{V_{n-1}(0) U_n(z) - V_n(0) U_{n-1}(z)}{A_{n-1}} \\ Q_{2n-1}(z) = \frac{V_{n-1}(0) V_n(z) - V_n(0) V_{n-1}(z)}{A_{n-1}} \\ G_n(z) = - \frac{U_{n-1}(0) U_n(z) - U_n(0) U_{n-1}(z)}{A_{n-1}} \\ H_n(z) = - \frac{U_{n-1}(0) V_n(z) - U_n(0) V_{n-1}(z)}{A_{n-1}} \end{cases}$$

Diese Formeln lassen erkennen, daß

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = K_n\left(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right), \quad \frac{G_n(z)}{H_n(z)} = K_n\left(z; -\frac{U_n(0)}{U_{n-1}(0)}\right)$$

ist: d. h. die Quotienten $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ bzw. $\frac{G_n(z)}{H_n(z)}$ ergeben sich als diejenigen verallgemeinerten Näherungsbrüche n -ter Ordnung von $K(z)$, die für $z=0$ einen Pol haben bzw. dort verschwinden. Die Nenner in den Formeln (14) sind so bestimmt, daß $P_{2n-1}(0) = 1$ und $H_n(0) = 1$ ist.

Die Formeln (14) gelten auch, wenn der Kettenbruch $S(z)$ der Form (1) nicht existiert, sofern nur sämtliche Determinanten $C_m \neq 0$ oder wie in unserm Falle sogar > 0 sind, und liefern für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, dieselben Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$, $H_n(z)$ wie die alten Definitionen.

Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sigma_n^2$ lassen sich durch die allgemeineren Reihen

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n^2(0)}{A_n} \text{ bzw. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n^2(0)}{A_n}$$

ersetzen, die für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, mit den Reihen (12) übereinstimmen.

Die im Abschnitt 7 angegebenen Sätze, die sich auf die Folgen von Polynomen $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ bzw. auf die Reihen (12) beziehen, gelten nunmehr auch für den Fall, daß einige der Determinanten B_m verschwinden, sofern man nur die Polynome bzw. die Reihen durch die allgemeineren Beziehungen (14) bzw. (15) definiert.

Aus unsern allgemeinen Sätzen lassen sich auch leicht notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne von $K(z)$ ableiten.

Außerdem wird für die beiden Typen von Kettenbrüchen (1) und (13) der Satz bewiesen:

Ist der Kettenbruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) für einen beliebigen reellen oder komplexen Wert von z konvergent, so konvergiert der Ketten-

bruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält.

9. Es soll endlich dem Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems eine andere Form gegeben werden, die unmittelbar von den Eigenschaften der mit den c_r gebildeten quadratischen Formen $F_n(x) = \sum_{i, n=0}^n c_{i+n} x_i x_n$

ausgeht, ohne erst auf die zugehörigen Kettenbrüche $K(z)$ und $S(z)$ zurückzugreifen. Wegen $C_m > 0$ für alle m ist die quadratische Form $F_n(x)$ positiv definit, besitzt also für $x_0 = 1$ ein Minimum $M^{(n)} > 0$. Mit wachsendem n können nun aber die Zahlen $M^{(n)}$ nie zunehmen, es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^{(n)} = M \geq 0.$$

Die formale quadratische Form von unendlich vielen Veränderlichen

$\sum_{i, n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt ist, wird eigentlich definit (uneigentlich definit) genannt, je nachdem die ihr zugehörige Zahl $M > 0$ ($M = 0$) ist.

Der Hauptsatz läßt sich nun auch in folgender Weise aussprechen:

Das Momentenproblem ist dann und nur dann bestimmt, wenn mindestens eine der beiden quadratischen Formen $\sum_{i, n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$, $\sum_{i, n=0}^{\infty} c_{i+n+2} x_i x_n$ uneigentlich definit ist.

Oder auch:

Das Momentenproblem ist bestimmt oder unbestimmt, je nachdem der Grenzwert der stets abnehmenden positiven Determinantenquotienten $\frac{C_n}{C_n'}$ Null ist oder nicht.

Hierbei ist zur Abkürzung

$$C_n' = \begin{vmatrix} c_4 & c_5 & \dots & c_{n+1} \\ c_5 & c_6 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt.

Kapitel I. Algebraische Betrachtungen¹⁵⁾.

§ 1.

Der assoziierte Kettenbruch¹⁶⁾.

1. Sei z eine komplexe Veränderliche,

$$(1) \quad \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

eine formale Potenzreihe mit reellen Koeffizienten c_v , über deren Konvergenzeigenschaften nichts vorausgesetzt sei; es fallen also auch solche Potenzreihen in den Kreis unserer Betrachtungen, die für jeden Wert von z von noch so großem absoluten Betrage divergieren.

Man bilde mit den Koeffizienten c_v die Hankelschen Determinanten

$$(2) \quad C_0 = 1, \quad C_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-2} \end{vmatrix}$$

und setze ein für allemal die C_m für jeden Wert des Index m von 0 verschieden voraus. Dann läßt sich durch einen dem Euklidischen Algorithmus nachgebildeten Divisionsprozeß aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ein formaler Kettenbruch der Form

$$(3) \quad K(z) = \frac{k_1}{z+l_1} + \frac{k_2}{z+l_2} + \frac{k_3}{z+l_3} + \dots$$

herleiten, wobei die k_v reelle, von 0 verschiedene, die l_v beliebige reelle Koeffizienten bedeuten. Ist

¹⁵⁾ Das Kapitel I und die §§ 6 und 7 des Kapitels II enthalten Resultate, die an und für sich nicht als neu anzusehen sind, deren Zusammenstellung jedoch dem Leser das Verständnis des Nachfolgenden erleichtern dürfte. Hingegen sind wir in der Darstellung und Bezeichnungswiese, insbesondere in den §§ 2, 3, 6 und 7 von dem bisher gebräuchlichem Wege erheblich abgewichen.

¹⁶⁾ Die Betrachtungen des § 1 leisten für den Kettenbruch $K(z)$ im wesentlichen das Gleiche, wie die in den Abschnitten 1. und 2. der Einleitung enthaltenen Ausführungen für den Kettenbruch $S(z)$. — Übrigens wird im folgenden nicht mehr auf die Überlegungen der Einleitung Bezug genommen. — Eine ausführliche Darstellung der meisten im § 1 angegebenen Resultate findet sich in der Dissertation des Herrn Grommer [l. c. Anm. ¹⁵⁾]. Vgl. insbes. Kap. I, § 1–3, S. 118–125. Vgl. auch O. Perron, Lehrbuch, S. 322–326 und S. 375–376.

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)}$$

der n -te Näherungsbruch von $K(z)$, so folgt aus den Rekursionsformeln ¹⁷⁾ für Zähler und Nenner des Näherungsbruches

$$(4) \quad \begin{cases} U_0(z) = 0, & V_0(z) = 1, \\ U_1(z) = k_1, & V_1(z) = z + l_1, \\ U_n(z) = (z + l_n) U_{n-1}(z) + k_n U_{n-2}(z), \\ V_n(z) = (z + l_n) V_{n-1}(z) + k_n V_{n-2}(z), \end{cases}$$

daß $U_n(z)$ ein Polynom vom Grade $n-1$, $V_n(z)$ ein Polynom vom Grade n ist; der Koeffizient des Gliedes z^n in $V_n(z)$ ist außerdem gleich 1.

Entwickelt man die rationale Funktion $K_n(z)$ in eine Potenzreihe

$$(5) \quad K_n(z) = \frac{c_0^{(n)}}{z} - \frac{c_1^{(n)}}{z^2} + \frac{c_2^{(n)}}{z^3} - \dots,$$

die für Werte der Veränderlichen z von hinreichend großem absoluten Betrage konvergiert, so zeigt sich der Zusammenhang von $K(z)$ mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ in der Übereinstimmung der $2n$ ersten Koeffizienten der Potenzreihen (1) und (5). Es ist nämlich

$$(6) \quad c_0^{(n)} = c_0, \quad c_1^{(n)} = c_1, \quad \dots, \quad c_{2n-1}^{(n)} = c_{2n-1}.$$

Durch die Beziehungen (6) und den Grad der Polynome in Zähler und Nenner ist der Quotient $K_n(z)$ eindeutig bestimmt. Andererseits folgt aus (6), daß aus zwei voneinander verschiedenen Potenzreihen $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\mathfrak{P}^*\left(\frac{1}{z}\right)$ durch das Divisionsverfahren nicht ein und derselbe Kettenbruch $K(z)$ hergeleitet werden kann.

2. Umgekehrt läßt sich jedem Kettenbruch $K(z)$ der Form (3) eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zuordnen. Ist nämlich ein Kettenbruch der Form (3) vorgelegt, so ergibt sich aus den Fundamentalformeln des Kettenbruchs

$$(7) \quad U_{n+1}(z) V_n(z) - U_n(z) V_{n+1}(z) = A_n$$

$$K_{n+1}(z) - K_n(z) = \frac{A_n}{V_{n+1}(z) V_n(z)} = \frac{A_n}{z^{2n+1}} + \frac{\kappa}{z^{2n+2}} + \frac{\lambda}{z^{2n+3}} + \dots^{18)},$$

wobei zur Abkürzung

$$(8) \quad A_0 = k_1, \quad A_n = (-1)^n k_1 k_2 \dots k_{n+1}$$

gesetzt ist und κ, λ, \dots irgendwelche reelle Konstanten bedeuten. Vergleicht man diese Potenzreihe mit der Differenz

¹⁷⁾ Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 5.

¹⁸⁾ Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 16 und S. 378.

$$K_{n+1}(z) - K_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu}^{(n+1)} - c_{\nu}^{(n)}}{z^{\nu+1}},$$

die sich durch Subtraktion der Reihen (5) ergibt, so erkennt man, daß die $2n$ ersten Koeffizienten $c_{\nu}^{(n+1)} - c_{\nu}^{(n)}$ verschwinden müssen, daß also

$$(9) \quad c_{\nu}^{(n+1)} = c_{\nu}^{(n)} \quad (\text{für } \nu = 0, 1, \dots, 2n-1), \quad c_{2n}^{(n+1)} - c_{2n}^{(n)} = \Delta_n$$

ist.

Indem man diese Formel für alle Werte des Index n anwendet, erhält man

$$c_{\nu}^{(n)} = c_{\nu}^{(n+1)} = \dots = c_{\nu}^{(n+m)} = \dots \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Man setze nunmehr allgemein

$$(10) \quad c_{\nu} = c_{\nu}^{(n)} \quad \left(\text{für } n \geq \frac{\nu+1}{2} \right)$$

und ordne dem vorgelegten Kettenbruch $K(z)$ die mit diesen Koeffizienten c , gebildete Potenzreihe (1) zu.

Aus den Beziehungen (9) und (10) läßt sich ein geschlossener Ausdruck in Determinantenform für die Größen Δ_n und k_n und für die Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ ableiten. Es ist wegen (10)

$$(11) \quad \mathfrak{P}\left(-\frac{1}{z}\right) - K_n(-z) = -\frac{c_{2n} - c_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} - \frac{c_{2n+1} - c_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} - \dots$$

Aus (10) folgt ferner $c_{2n} = c_{2n}^{(n+1)}$, also mit Rücksicht auf (9)

$$(12) \quad c_{2n} - c_{2n}^{(n)} = c_{2n}^{(n+1)} - c_{2n}^{(n)} = \Delta_n.$$

Die Multiplikation beider Seiten von (11) mit $V_n(-z)$ ergibt

$$(13) \quad V_n(-z) \mathfrak{P}\left(-\frac{1}{z}\right) = U_n(-z) - \frac{(-1)^n \Delta_n}{z^{n+1}} - \frac{\alpha}{z^{n+2}} - \frac{\beta}{z^{n+3}} - \dots,$$

wo α, β, \dots reelle Koeffizienten bedeuten.

Setzt man

$$V_n(-z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_n z^n,$$

so erhält man aus (13) $n+1$ lineare Gleichungen für die Koeffizienten g_{ν} , indem man das formale Produkt $V_n(-z) \mathfrak{P}\left(-\frac{1}{z}\right)$ bildet, und den Koeffizienten des Gliedes $\frac{1}{z^{n+1}}$ gleich $(-1)^n \Delta_n$, die Koeffizienten der Glieder $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^n}$ gleich Null setzt:

$$(18) \quad V_n(-z) = \frac{1}{C_n} \begin{vmatrix} 1, & z, & \dots, & z^n \\ c_0, & c_1, & \dots, & c_n \\ c_1, & c_2, & \dots, & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}, & c_n, & \dots, & c_{2n-1} \end{vmatrix},$$

so genügt dieser Ausdruck offenbar den Gleichungen (15) und der Koeffizient des Gliedes z^n wird, wie verlangt, gleich $(-1)^n$.

In Formel (13) tritt das Polynom $U_n(z)$ als derjenige Bestandteil des formalen Produktes $V_n(-z) \mathfrak{P}\left(-\frac{1}{z}\right)$ auf, der keine negativen Potenzen von z enthält. Es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} U_n(-z) \\ = -g_0 \cdot 0 - g_1 c_0 - g_2 (c_0 z + c_1) - \dots - g_n (c_0 z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \dots + c_{n-1}), \end{aligned}$$

d. h. man kann sich $U_n(-z)$ entstanden denken, indem man in dem Polynom $-V_n(-z)$ die Potenz z^r durch die Polynome

$$(19) \quad R_{r-1} = c_0 z^{r-1} + c_1 z^{r-2} + \dots + c_{r-1} \quad (R_{-1} = 0)$$

ersetzt. Man erhält also aus (18) für $U_n(-z)$ die Determinantendarstellung²⁰⁾

$$(20) \quad U_n(-z) = \frac{-1}{C_n} \begin{vmatrix} 0, & R_0, & \dots, & R_{n-1} \\ c_0, & c_1, & \dots, & c_n \\ c_1, & c_2, & \dots, & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}, & c_n, & \dots, & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

3. Im Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß sich jedem Kettenbruch $K(z)$ der Form (3) dessen Koeffizienten l , reell und dessen Koeffizienten k , reell und von Null verschieden sind, eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zuordnen läßt, deren zugehörige Hankelsche Determinanten C_m sämtlich von Null verschieden sind. Man kann nunmehr durch das im Abschnitt 1 erwähnte Divisionsverfahren aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ wiederum einen neuen Kettenbruch $K^*(z)$ der Form (3) herleiten. Die Potenzreihen (5), in die sich die Näherungsbrüche $K_n^*(z)$ des neuen Kettenbruchs $K^*(z)$ entwickeln lassen, genügen nun aber den Beziehungen (6) und sind durch diese eindeutig bestimmt. Andererseits genügen aber die Näherungsbrüche $K_n(z)$ des

²⁰⁾ Bei Stieltjes 8, S. 25–28 finden sich analoge Darstellungen wie (18) und (20) für Zähler und Nenner von Näherungsbrüchen eines anderen Kettenbruchs (des Kettenbruchs (1) der Einleitung; vgl. auch Formel (35) und (36) des § 2), die auch in ähnlicher Weise abgeleitet sind.

ursprünglich vorgelegten Kettenbruchs $K(z)$ wegen (10) den gleichen Beziehungen, es ist folglich

$$K_n^*(z) = K_n(z), \quad K^*(z) = K(z).$$

Dieses Resultat läßt sich in den Satz zusammenfassen:

Satz I. *Jedem Kettenbruch $K(z)$ der Gestalt (3) mit reellen l_r und reellen, von Null verschiedenen k_r läßt sich eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ der Gestalt (1) zuordnen, deren Koeffizientendeterminanten $C_m \neq 0$ sind. Aus ihr kann umgekehrt der vorgelegte Kettenbruch $K(z)$ wieder durch ein Divisionsverfahren hergeleitet werden.*

Die Zuordnung zwischen Kettenbruch und Potenzreihe ist also ein-eindeutig: Zu jeder Potenzreihe mit von Null verschiedenen Koeffizientendeterminanten C_m gehört ein und nur ein Kettenbruch mit reellen Koeffizienten l_r und reellen von Null verschiedenen Koeffizienten k_r und umgekehrt.

Mit Herrn Perron wollen wir Kettenbruch und Potenzreihe miteinander assoziiert nennen.

4. Wir ersetzen die bisherige Voraussetzung $C_m \neq 0$ für alle m durch die engere $C_m > 0$ für alle m .

Definition I. *Wir nennen eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ der Fo. m (1) positiv definit, wenn die zugehörigen Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich positiv sind.*

Dann folgt unmittelbar aus Formel (17) der Satz:

Satz II. *Der Kettenbruch $K(z)$ ist dann und nur dann mit einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziiert, wenn seine Koeffizienten k_n den Bedingungen genügen*

$$(21) \quad k_1 > 0, \quad k_{n+1} < 0 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Mit der Bedingung (21) ist wegen (8) die Bedingung

$$A_n > 0 \quad \text{für alle } n \geq 0$$

äquivalent.

Die Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche solcher Kettenbrüche hat eine fundamentale Eigenschaft, die sich in dem Satz aussprechen läßt:

Satz III²¹⁾. *Ist $K(z)$ ein Kettenbruch, der mit einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziiert ist, so haben sämtliche Näherungs-*

²¹⁾ Vgl. z. B. die ausführliche Darstellung des Beweises von Satz III bei Grommer, l. c. Anm. ¹²⁾, S. 123–125. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 393–396.

brüche $K_n(z)$ nur reelle einfache Pole mit positiven Residuen, d. h. sie lassen sich als eine Summe von Partialbrüchen

$$(22) \quad K_n(z) = \sum_{v=1}^n \frac{N_v^{(n)}}{z + l_v^{(n)}}$$

darstellen, wo die $l_v^{(n)}$ beliebige reelle untereinander verschiedene Zahlen und die $N_v^{(n)} > 0$ sind.

Wir verzichten auf die Ausführung des oft dargestellten Beweises.

§ 2.

Die verallgemeinerten Näherungsbrüche und der korrespondierende Kettenbruch.

1. Außer den rationalen Funktionen $K_n(z)$ haben wir im folgenden auch die Funktionen $K_n(z; t)$ zu betrachten, die entstehen, wenn man in dem Näherungsbruch $K_n(z)$ den letzten Koeffizienten l_n durch $l_n + t$ ersetzt, unter t einen beliebigen reellen Parameter verstanden. Es ist also

$$(23) \quad K_n(z; t) = \frac{k_1}{z + l_1} + \dots + \frac{k_{n-1}}{z + l_{n-1}} + \frac{k_n}{z + l_n + t}.$$

Aus den Rekursionsformeln (4) für $U_n(z)$ und $V_n(z)$ folgt unmittelbar, daß

$$(24) \quad K_n(z; t) = \frac{U_n(z) + tU_{n-1}(z)}{V_n(z) + tV_{n-1}(z)}$$

ist. Den Quotienten $K_n(z; t)$ wollen wir einen verallgemeinerten Näherungsbruch von $K(z)$ nennen.

Offenbar wird $K_n(z; 0) = K_n(z)$; es werde ferner um den verallgemeinerten Näherungsbruch auch für $t = \infty$ zu definieren,

$$(25) \quad K_n(z; \infty) = K_{n-1}(z)$$

gesetzt.

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ergibt sich mit Rücksicht auf Formel (7) und (24)

$$K_n(z) - K_n(z; t) = \frac{t \Delta_{n-1}}{V_n(z) [V_n(z) + tV_{n-1}(z)]} = \frac{t \Delta_{n-1}}{z^{2n}} + \frac{\alpha(t)}{z^{2n+1}} + \dots,$$

wo $\alpha(t), \dots$ reelle Koeffizienten bedeuten, die nur von dem Parameter t abhängen. Entwickelt man nunmehr $K_n(z; t)$ in eine für hinreichend große Werte von $|z|$ konvergente Potenzreihe, so wird wegen (6), wenn $t \neq \infty$ ist,

$$(26) \quad K_n(z; t) = K_n(z) - \frac{t \Delta_{n-1}}{z^{2n}} - \frac{\alpha(t)}{z^{2n+1}} - \dots \\ = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^3} + \dots + \frac{c_{2n-2}}{z^{2n-1}} - \frac{c_{2n-1} + t \Delta_{n-1}}{z^{2n}} + \frac{\gamma_{2n}(t)}{z^{2n+1}} - \dots$$

Für $t = 0$ bzw. $t = \infty$ gelten die Entwicklungen für $K_n(z)$ bzw. $K_{n-1}(z)$, die uns aus den Formeln (5) und (6) schon bekannt sind.

2. Unter den verallgemeinerten Näherungsbrüchen verdienen diejenigen ein besonderes Interesse, die an der Stelle $z = 0$ einen Pol besitzen. Um sie zu erhalten, muß, wie aus (24) folgt, in $K_n(z; t)$ der Parameter $t = -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}$ gewählt werden. Setzt man daher für $n = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$

$$(27) \quad \begin{cases} P_{2n-1}(z) = \frac{V_{n-1}(0) U_n(z) - V_n(0) U_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}}, \\ Q_{2n-1}(z) = \frac{V_{n-1}(0) V_n(z) - V_n(0) V_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}}, \end{cases}$$

so ist ihr Quotient offenbar

$$(28) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = K_n\left(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right)$$

und hat für $z = 0$ einen Pol. Ist $V_{n-1}(0) = 0$, so wird $t = \infty$, und man hat

$$(29) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{U_{n-1}(z)}{V_{n-1}(z)} = K_n(z; \infty) = K_{n-1}(z)$$

in Übereinstimmung mit (25).

Man beachte, daß $V_n(0)$ und $V_{n-1}(0)$ nicht beide gleichzeitig verschwinden können, denn sonst wäre nach Formel (7) des § 1 $\Delta_{n-1} = 0$, was wegen $k, + 0$ in Verbindung mit Formel (8) unmöglich ist.

Aus (18) folgt

$$V_{n-1}(0) = \frac{B_{n-1}}{C_{n-1}},$$

wobei zur Abkürzung

$$(30) \quad B_0 = 1, \quad B_{n-1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-3} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. $V_{n-1}(0)$ verschwindet also dann und nur dann, wenn die Determinante B_{n-1} den Wert 0 hat.

Die Nenner in den beiden Formeln (27) sind so gewählt, daß

$$(31) \quad P_{2n-1}(0) = 1$$

ist, wie aus Formel (7) unmittelbar hervorgeht.

Entwickelt man $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ in eine für hinreichend große Werte von $|z|$ konvergente Potenzreihe:

$$(32) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{\gamma_0^{(n)}}{z} - \frac{\gamma_1^{(n)}}{z^2} + \frac{\gamma_2^{(n)}}{z^3} - \dots,$$

so erhält man wegen (26), sofern nur B_{n-1} und damit auch $V_{n-1}(0)$ von Null verschieden sind,

$$(33) \quad \gamma_0^{(n)} = c_0, \quad \gamma_1^{(n)} = c_1, \quad \dots, \quad \gamma_{2n-2}^{(n)} = c_{2n-2};$$

denn nach Formel (28) ist $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ auch ein verallgemeinerter Näherungsbruch $K_n(z; t)$.

Ist $B_{n-1} = 0$ und damit auch $V_{n-1}(0) = 0$, so treten wegen (29) an Stelle von (33) die Beziehungen (10) und (12) und es ergibt sich.

$$(34) \quad \begin{cases} c_{2n-2} - \gamma_{2n-2}^{(n)} = c_{2n-2} - c_{2n-2}^{(n-1)} = \Delta_{n-1}, \\ \gamma_\nu^{(n)} = c_\nu^{(n-1)} = c_\nu \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, 2n-3. \end{cases}$$

Der Vollständigkeit halber sollen auch für die Polynome $P_{2n-1}(z)$ und $Q_{2n-1}(z)$ Determinantendarstellungen angegeben werden; sie werden aber erst an einer späteren Stelle des Teiles III benutzt werden. Es ist

$$(35) \quad P_{2n-1}(-z) = \frac{1}{C_n} \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$$(36) \quad Q_{2n-1}(-z) = \frac{-1}{C_n} \begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix},$$

wobei die R_ν dieselbe Bedeutung wie in Formel (19) des § 1 haben. Da die Formeln bereits bekannt sind²²⁾, verzichten wir auf die ausführliche Angabe des Beweises und begnügen uns mit dem Hinweis, daß sie aus den Beziehungen

$$(37) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}\{u^\nu Q_{2n-1}(-u)\} &= 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-2), \\ P_{2n-1}(0) &= 1, \quad Q_{2n-1}(0) = 0 \end{aligned}$$

mutatis mutandis ebenso hergeleitet werden wie die Determinantendarstellungen (18) und (20) des § 1 aus (15). (Die Beziehungen (37) folgen unmittelbar aus (15) wegen (27)).

3. Wir führen noch weitere Polynome

$$(38) \quad P_{2n}(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(0)}, \quad Q_{2n}(z) = \frac{V_n(z)}{V_n(0)}, \quad \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = K_n(z)$$

²²⁾ Vgl. Stieltjes, 8, S. 28–23.

ein, um zwischen den Polynomen $P_{2n-1}(z)$, $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ bzw. $Q_{2n-1}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ Rekursionsformeln aufzustellen. Man beachte übrigens, daß während der Quotient $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = K_n(z)$ immer existiert, die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ nur einen Sinn haben, wenn $V_n(0)$ oder, was dasselbe ist, wenn die Determinante B_n von 0 verschieden ist.

An die Spitze dieser Betrachtung stellen wir eine Gruppe von Formeln, die von der einschränkenden Voraussetzung $B_n \neq 0$ noch nicht abhängen und uns auch später wichtige Dienste leisten werden²³⁾.

$$(39) \quad \frac{V_n(z) V_{n-1}(u) - V_n(u) V_{n-1}(z)}{A_{n-1}} = (z - u) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{V_v(z) V_v(u)}{A_v},$$

$$(40) \quad \frac{U_n(z) V_{n-1}(u) - V_n(u) U_{n-1}(z)}{A_{n-1}} = 1 + (z - u) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{U_v(z) V_v(u)}{A_v},$$

$$(41) \quad \frac{U_n(z) U_{n-1}(u) - U_n(u) U_{n-1}(z)}{A_{n-1}} = (z - u) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{U_v(z) U_v(u)}{A_v}.$$

Wir geben hier nur den Beweis von Formel (40) an, da sich die Formeln (39) und (41) in derselben Weise verifizieren lassen.

Für $n = 0$ wird mit Rücksicht auf die Rekursionsformeln (4)

$$\frac{U_1(z) V_0(u) - V_1(u) U_0(z)}{A_0} = 1.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{U_n(z) V_{n-1}(u) - V_n(u) U_{n-1}(z)}{A_{n-1}} &= 1 + \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{U_{v+1}(z) V_v(u) - V_{v+1}(u) U_v(z)}{A_v} \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_v(z) V_{v-1}(u) - V_v(u) U_{v-1}(z)}{A_{v-1}} \right), \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{U_{v+1}(z) V_v(u) - V_{v+1}(u) U_v(z)}{A_v} - \frac{U_v(z) V_{v-1}(u) - V_v(u) U_{v-1}(z)}{A_{v-1}} \\ = (z - u) \frac{U_v(z) V_v(u)}{A_v}, \end{aligned}$$

wie man leicht nachprüft, indem man für die Polynome $U_{v+1}(z)$ und $V_{v+1}(u)$ ihre sich aus den Rekursionsformeln (4) ergebenden Werte einsetzt. Damit ist die Formel (40) bewiesen.

²³⁾ Formel (39) findet sich für den speziellen Fall, daß die Näherungsnenner $V_v(z)$ bis auf einen konstanten Faktor gleich den Legendreschen Polynomen sind, zuerst in einer Arbeit von E. B. Christoffel: „Über die Gaußsche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben“, Journ. f. r. u. angew. Math. 55 (1858), S. 61–82. Vgl. insbes. S. 73. Vgl. außerdem Perron, Lehrbuch, S. 381.

Setzt man in (39) und (40) $u = 0$, so erhält man für $Q_{2n-1}(z)$ und $P_{2n-1}(z)$ die Darstellungen

$$(42) \quad \begin{cases} P_{2n-1}(z) = 1 + z \sum_{r=1}^{n-1} \frac{V_r(0) U_r(z)}{\Delta_r}, \\ Q_{2n-1}(z) = z \sum_{r=0}^{n-1} \frac{V_r(0) V_r(z)}{\Delta_r} \end{cases}$$

oder auch

$$(43) \quad \begin{cases} P_{2n-1}(z) = z \frac{V_{n-1}(0)}{\Delta_{n-1}} U_{n-1}(z) + P_{2n-3}(z), \\ Q_{2n-1}(z) = z \frac{V_{n-1}(0)}{\Delta_{n-1}} V_{n-1}(z) + Q_{2n-3}(z). \end{cases}$$

Diese Formel läßt erkennen, daß, falls $V_{n-1}(0) = 0$ ist, $P_{2n-1}(z) = P_{2n-3}(z)$, $Q_{2n-1}(z) = Q_{2n-3}(z)$, also wegen (29)

$$(44) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{U_{n-1}(z)}{V_{n-1}(z)} = \frac{P_{2n-3}(z)}{Q_{2n-3}(z)}$$

wird.

Setzt man nunmehr

$$(45) \quad a_{2n+1} = \frac{V_n^2(0)}{\Delta_n} = \frac{B_n^2}{C_n C_{n+1}} \quad (\text{vgl. (16) und (18)}),$$

so folgen, wenn $V_n(0) \neq 0$ ist, aus (38), (43) und (45) die Rekursionsformeln

$$(46) \quad \begin{cases} P_{2n+1}(z) = a_{2n+1} z P_{2n}(z) + P_{2n-1}(z), \\ Q_{2n+1}(z) = a_{2n+1} z Q_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z). \end{cases}$$

Aus den unmittelbar evidenten Formeln

$$\begin{aligned} \frac{U_n(z)}{V_n(0)} - \frac{U_{n-1}(z)}{V_{n-1}(0)} &= \frac{V_{n-1}(0) U_n(z) - V_n(0) U_{n-1}(z)}{V_n(0) V_{n-1}(0)}, \\ \frac{V_n(z)}{V_n(0)} - \frac{V_{n-1}(z)}{V_{n-1}(0)} &= \frac{V_{n-1}(0) V_n(z) - V_n(0) V_{n-1}(z)}{V_n(0) V_{n-1}(0)} \end{aligned}$$

folgt wegen (27) und (38), wenn $V_n(0)$ und $V_{n-1}(0)$ beide von Null verschieden sind und

$$(47) \quad a_{2n} = \frac{\Delta_{n-1}}{V_n(0) V_{n-1}(0)} = \frac{C_n^2}{B_n B_{n-1}}$$

gesetzt wird,

$$(48) \quad \begin{cases} P_{2n}(z) = a_{2n} P_{2n-1}(z) + P_{2n-2}(z) \\ Q_{2n}(z) = a_{2n} Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z). \end{cases}$$

4. Man setze nunmehr weiter voraus, daß die in Formel (30) definierten Determinanten B_m für alle Werte des Index m von Null verschieden sind, oder, was das Gleiche bedeutet, daß die Polynome $V_m(z)$ für alle m an der Stelle $z = 0$ nicht verschwinden. Dann werden sämtliche in den

Formeln (45) und (47) definierten Koeffizienten a_{2n+1} und a_{2n} endliche reelle von Null verschiedene Zahlen. Es folgt daher aus den Rekursionsformeln (46) und (48), die nunmehr für jeden Wert des Index n einen Sinn haben, daß die Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, bzw. $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$ Zähler und Nenner der Näherungsbrüche $2n-1$ -ter bzw. $2n$ -ter Ordnung des Kettenbruchs

$$(49) \quad S(z) = \frac{1}{a_1 z} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z} + \frac{1}{a_4} + \dots$$

sind.

Der Kettenbruch $S(z)$ ist hier aus dem Kettenbruch $K(z)$ abgeleitet worden. Er erscheint also derselben Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnet wie der Kettenbruch $K(z)$. Der Zusammenhang der Entwicklungen für

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{c_0^{(n)}}{z} - \frac{c_1^{(n)}}{z^2} + \dots,$$

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{\gamma_0^{(n)}}{z} - \frac{\gamma_1^{(n)}}{z^2} + \dots$$

mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ ist in den Formeln (6) und (33) klar gestellt.

Übrigens läßt sich der Kettenbruch $S(z)$ auch durch ein passend angeordnetes formales Divisionsverfahren unmittelbar aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ herleiten, sofern nur sämtliche Koeffizientendeterminanten C_m und B_m von 0 verschieden sind.

Umgekehrt kann man zu jedem Kettenbruch $S(z)$ der Form (49) mit reellen von Null verschiedenen Koeffizienten a_r — auf ähnliche Weise wie in § 1 zu jedem Kettenbruch $K(z)$ der Form (3) — eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ finden, aus der wiederum $S(z)$ in der angegebenen Weise gewonnen werden kann, das heißt *erstens*: die Hankelschen Determinanten C_m und B_m , die aus den Koeffizienten c_r der aus $S(z)$ abgeleiteten Potenzreihe gebildet sind, sind für alle m von Null verschieden; *zweitens*: die Koeffizienten a_{2n+1} und a_{2n} des Kettenbruchs $S(z)$ werden wieder durch die Determinantenquotienten (45) und (47) dargestellt²⁴⁾. Bestimmt man also den Ketten-

²⁴⁾ Vgl. Stieltjes 8, S. 18–19 und S. 26; Perron, Lehrbuch, S. 302–306. Noch einfacher vielleicht beweist man die eindeutige Korrespondenz zwischen dem Kettenbruch $S(z)$ der Gestalt (49) und der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, indem man zeigt, daß sich jedem Kettenbruch $S(z)$ ein Kettenbruch $K(z)$ der Gestalt (3) zuordnen läßt, dessen Näherungsbrüche n -ter Ordnung gleich $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$ sind, und aus dem sich umgekehrt

bruch $K(z)$, der mit der aus $S(z)$ abgeleiteten Potenzreihe assoziiert ist, und konstruiert man wiederum mit Hilfe von $K(z)$ in der angegebenen Weise den Kettenbruch $S^*(z)$ der Form (49), der wegen $C_m \neq 0$, $B_m \neq 0$ für alle m sicher existiert, so ist der so gewonnene Kettenbruch $S^*(z)$ gleich dem ursprünglichen Kettenbruch $S(z)$; denn für die Koeffizienten a_{2n+1}^* und a_{2n}^* von $S^*(z)$ gelten die gleichen Darstellungen (45) und (47) durch Determinantenquotienten wie für die Koeffizienten a_{2n+1} und a_{2n} von $S(z)$. Wir verzichten indessen darauf, den Beweis dieses oft dargestellten Satzes genauer auszuführen, zumal wir ihn nur selten (erst im Teil II) benutzen werden.

Nennen wir Kettenbruch und Potenzreihe, die in der eben beschriebenen Beziehung zueinander stehen, nach Herrn Perron miteinander korrespondierend, so gilt der Satz:

Satz IV. Aus jeder Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, deren Koeffizientendeterminanten C_m und B_m sämtlich von Null verschieden sind, läßt sich ein mit ihr korrespondierender Kettenbruch $S(z)$ ableiten und umgekehrt aus jedem Kettenbruch $S(z)$ der Form (49) eine Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ der Form (1), deren Koeffizientendeterminanten C_m und B_m von Null verschieden sind und die mit $S(z)$ korrespondierend ist.

Die Bedingung $B_m \neq 0$ für alle m kann auch durch die mit ihr äquivalente Bedingung $V_m(0) \neq 0$ für alle m ersetzt werden.

5. Wir lassen die Annahme $B_m \neq 0$ wieder fallen, wollen aber nunmehr sämtliche Determinanten $C_m > 0$ voraussetzen; $K(z)$ sei also mit einer positiv definiten Potenzreihe assoziiert. Diese Voraussetzung ist offenbar notwendig und hinreichend, damit die in (45) definierten Größen a_{2n+1} sämtlich ≥ 0 sind.

Es folgt außerdem aus Satz III, daß auch die verallgemeinerten Näherungsbrüche $K_n(z; t)$ von $K(z)$ für jeden festen reellen Wert von t sich in Partialbrüche der Form (22) mit reellen einfachen Polen und positiven Residuen zerlegen lassen:

$$(50) \quad K_n(z; t) = \sum_{v=1}^n \frac{N_v^{(n)}(t)}{z + \lambda_v^{(n)}(t)};$$

wiederum der ursprüngliche Kettenbruch $S(z)$ in der angegebenen Weise ableiten läßt. Dem Kettenbruch $S(z)$ ordne man nunmehr die Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zu, die mit dem zu $S(z)$ gehörigen Kettenbruch $K(z)$ assoziiert ist. Da, wie im § 1 gezeigt wurde, die Zuordnung von $K(z)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eindeutig ist, so muß auch die Zuordnung von $S(z)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eindeutig sein.

denn $K_n(z; t)$ kann als n -ter Näherungsbruch eines Kettenbruchs $K^*(z)$ aufgefaßt werden, der aus $K(z)$ gewonnen wird, indem man den einen Koeffizienten l_n durch $l_n + t$ ersetzt. Nach Satz II ist aber auch $K^*(z)$ mit einer positiv definiten Potenzreihe assoziiert.

Insbesondere hat man wegen (28), wenn $B_{n-1} \neq 0$ ist,

$$(51) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M^{(n)}}{z} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{M_v^{(n)}}{z + \omega_v^{(n)}},$$

und wenn $B_{n-1} = 0$ ist, wegen (29)

$$(52) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M^{(n)}}{z} + \sum_{v=1}^{n-2} \frac{M_v^{(n)}}{z + \omega_v^{(n)}}.$$

Hierbei bedeuten die $\omega_v^{(n)}$ reelle von Null verschiedene Zahlen und die $M_v^{(n)}$ positive reelle Zahlen.

Aus der Partialbruchzerlegung (51) bzw. (52) ergeben sich einfache Summendarstellungen für die Koeffizienten $\gamma_v^{(n)}$ der Potenzreihenentwicklung (32) von $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(n)} &= M^{(n)} + \sum_v M_v^{(n)}, \\ \gamma_\mu^{(n)} &= \sum_v M_v^{(n)} (\omega_v^{(n)})^\mu \quad (\mu \geq 1). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man im Falle $B_{n-1} \neq 0$ die Formeln (33) und im Falle $B_{n-1} = 0$ die Formeln (34), so erhält man auch für die ersten $2n-1$ Koeffizienten c_ν der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ Darstellungen durch endliche Summen, und zwar wird²⁵⁾:

I. Im Falle $B_{n-1} \neq 0$

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} c_0 &= M^{(n)} + \sum_{v=1}^{n-1} M_v^{(n)}, \\ c_\mu &= \sum_{v=1}^{n-1} M_v^{(n)} (\omega_v^{(n)})^\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n-2). \end{aligned} \right.$$

²⁵⁾ Einen Beweis für diese Darstellung der Koeffizienten c_ν ohne Benutzung der Kettenbrüche findet man in einer Arbeit von Herrn E. Fischer: „Über das Carathéodorysche Problem Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend.“ Rend. del Circo. mat. di Palermo 32 (1911), S. 240–256, vgl. insbes. S. 244–248.

II. Im Falle $B_{n-1} = 0$

$$(54) \quad \begin{cases} c_0 = M^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{n-2} M_{\nu}^{(n)}, \\ c_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{n-2} M_{\nu}^{(n)} (\omega_{\nu}^{(n)})^{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n-3), \\ c_{2n-2} = A_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{n-2} M_{\nu}^{(n)} (\omega_{\nu}^{(n)})^{2n-2}. \end{cases}$$

§ 3.

Eigentlich und uneigentlich definite quadratische Formen.

1. Wir werden im folgenden oft Gelegenheit haben, neben der formalen Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ die formale quadratische Form der unendlich vielen Veränderlichen x_0, x_1, x_2, \dots

$$F(x) = \sum_{i, n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$$

zu betrachten. Wir nennen die Form $F(x)$ mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ und dem zugehörigen Kettenbruch $K(z)$ assoziiert.

Definition II. Die formale quadratische Form $F(x) = \sum_{i, n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$ heißt positiv definit, wenn ihre sämtlichen Abschnittsformen

$$F_n(x) = \sum_{i, n=0}^{n-1} c_{i+n} x_i x_n$$

positiv definit sind.

Demnach ist nach bekannten fundamentalen Sätzen aus der Theorie der quadratischen Formen endlich vieler Veränderlicher die Form $F(x)$ dann und nur dann positiv definit, wenn sämtliche Koeffizientendeterminanten $C_m > 0$ sind. Also ist nach Definition I eine positiv definite Form $F(x)$ stets mit einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziiert und umgekehrt.

Vermittelst der Formeln (53) und (54) lassen sich im positiv definiten Falle die Abschnittsformen $F_n(x)$ als Summen von Quadraten mit positiven Koeffizienten darstellen. Es ergibt sich nämlich:

I. Im Falle $B_{n-1} + 0$

$$(55) \quad F_n(x) = M^{(n)} x_0^2 + \sum_{\nu=1}^{n-1} M_{\nu}^{(n)} (x_0 + \omega_{\nu}^{(n)} x_1 + \dots + (\omega_{\nu}^{(n)})^{n-1} x_{n-1})^2.$$

II. Im Falle $B_{n-1} = 0$

$$(56) F_n(x) = M^{(n)} x_0^2 + \Delta_{n-1} x_{n-1}^2 + \sum_{r=1}^{n-2} M_r^{(n)} (x_0 + \omega_r^{(n)} x_1 + \dots + (\omega_r^{(n)})^{n-1} x_{n-1})^2.$$

Aus (55) bzw. (56) folgert man leicht den

Satz V²⁶⁾. Die positiv definite Form $F_n(x)$ nimmt im Raum von n Dimensionen der Veränderlichen x_0, x_1, \dots, x_{n-1} auf der $n-1$ dimensionalen Ebene $x_0 = 1$ den Wert $M^{(n)}$ als Minimum an.

Beweis. I. Im Falle $B_{n-1} \neq 0$ schließt man aus Formel (55), daß für $x_0 = 1$

$$F_n(x) \geq M^{(n)}$$

ist, da $F_n(x) - M^{(n)}$ gleich einer nicht negativen Summe ist. Man setze nunmehr für die Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} in $F_n(x)$ diejenigen Werte ein, die den $n-1$ linearen inhomogenen Gleichungen

$$\omega_r^{(n)} x_1 + (\omega_r^{(n)})^2 x_2 + \dots + (\omega_r^{(n)})^{n-1} x_{n-1} = -1 \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

genügen. Diese Gleichungen besitzen eine Lösung, da ihre Determinante als Vandermondesche Determinante von Null verschieden ist. Dann ist offenbar für $x_0 = 1$

$$F_n(x) = M^{(n)}.$$

II. Im Falle $B_{n-1} = 0$ folgt aus (56) ebenso wie im Falle I, daß für $x_0 = 1$

$$F_n(x) \geq M^{(n)}$$

ist.

Man bestimme nunmehr für die Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_{n-2} diejenigen Werte, die den $n-2$ linearen Gleichungen

$$\omega_r^{(n)} x_1 + (\omega_r^{(n)})^2 x_2 + \dots + (\omega_r^{(n)})^{n-2} x_{n-2} = -1 \quad (r=1, 2, \dots, n-2)$$

genügen und setze sie nebst $x_0 = 1, x_{n-1} = 0$ in $F_n(x)$ ein; dann ist offenbar

$$F_n(x) = M^{(n)},$$

und damit ist Satz V bewiesen.

2. Nach der Cauchyschen Residuenformel ist

$$M^{(n)} = \frac{P_{2n-1}(0)}{Q_{2n-1}'(0)}.$$

Aus (31) und (42) ergibt sich mithin

$$(57) M^{(n)} = \frac{1}{Q_{2n-1}'(0)} = \frac{1}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{V_r^2(0)}{\Delta_r}} = \frac{1}{\mu_n}.$$

²⁶⁾ Vgl. Stieltjes 8, S. 113–114. Sein Beweis ist von dem des Textes verschieden.

wenn mit Rücksicht auf (45)

$$(58) \quad \mu_n = \sum_{r=0}^{n-1} a_{2r+1} = Q'_{2n-1}(0)$$

gesetzt wird.

Formel (57) läßt erkennen, daß die Zahlen $M^{(n)}$ mit wachsendem n nie zunehmen können, was übrigens auch direkt aus der Minimumeigenschaft der Zahlen $M^{(n)}$ folgt.

Da, wie aus Formel (7) geschlossen wurde, nicht gleichzeitig $V_{n-1}(0)$ und $V_{n-2}(0)$ verschwinden kann, so folgt aus $V_{n-1}(0) = 0$,

$$M^{(n)} = M^{(n-1)} < M^{(n-2)}.$$

Mithin nähert sich die beschränkte monotone Folge von Zahlen $M^{(n)}$ mit wachsendem n einem Grenzwert M , der kleiner als alle Zahlen $M^{(n)}$ ist:

$$(59) \quad M < M^{(n)}.$$

Da die Zahlen $M^{(n)}$ alle positiv sind, so ist $M \geq 0$, und zwar ist wegen (57) $M > 0$, wenn $\sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r^2(0)}{\Delta_r}$ konvergiert, $M = 0$, wenn

$\sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1}$ divergiert.

Definition III. Die positiv definite quadratische Form $F(x) = \sum_{i,n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$ heißt eigentlich oder uneigentlich definit, je nachdem der Grenzwert M der Minima $M^{(n)}$ der zugehörigen Abschnittsformen auf der Ebene $x_0 = 1$ größer oder gleich Null ist.

Satz VI. Die positiv definite Form $F(x)$ ist eigentlich oder uneigentlich definit, je nachdem die zugehörige Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{V_r^2(0)}{\Delta_r}$ konvergiert oder divergiert.

Ist $F(x)$ eine eigentlich definite Form, so ist die Form $F(x) - Mx_0^2$ uneigentlich definit.

Ist $N > M$, so ist (auch im Falle $M = 0$) $F(x) - Nx_0^2$ keine definite Form mehr.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist bereits bewiesen.

Da wegen (59) $M^{(n)} - M > 0$ ist, so ist auch $F(x) - Mx_0^2$ eine positiv definite Form, deren Abschnittsformen $F_n(x) - Mx_0^2$ auf der Ebene $x_0 = 1$ offenbar das Minimum $M^{(n)} - M$ annehmen. Andererseits ist aber $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{(n)} - M = 0$, also ist $F(x) - Mx_0^2$ eine uneigentlich definite Form.

Ist $N > M$, so muß wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{(n)} = M$ eine Zahl $M^{(m)} < N$ existieren.

Dann ist aber die m -te Abschnittsform $F_m(x) - Nx_0^2$ keine definite Form mehr, da sie auf der Ebene $x_0 = 1$ jedenfalls den Wert $M^{(m)} - N < 0$ annimmt. Mithin ist wegen Definition II auch die Form $F(x) - Nx_0^2$ nicht mehr definit, w. z. b. w.

§ 4.

Eine spezielle Transformation von Potenzreihe und Kettenbruch.

1. Es sei $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Potenzreihe der Form (1), deren zugehörige Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich von Null verschieden sein mögen, so daß also der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ existiert.

Ist λ eine beliebige reelle Zahl, so substituieren wir $z + \lambda$ für z und betrachten die transformierte Potenzreihe²⁷⁾

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{c_v}{(z+\lambda)^{v+1}} = \overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\bar{c}_v}{z^{v+1}},$$

wobei nach bekannten Transformationsformeln

$$(60) \quad \bar{c}_v = c_v + \binom{v}{1} \lambda c_{v-1} + \binom{v}{2} \lambda^2 c_{v-2} + \dots + \binom{v}{v} \lambda^v c_0$$

gesetzt ist.

Satz VII²⁸⁾. Der Kettenbruch

$$(61) \quad \overline{K}(z) = K(z+\lambda) = \cfrac{k_1}{z+\lambda+l_1} + \cfrac{k_2}{z+\lambda+l_2} + \dots$$

ist mit der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziiert.

Ist ferner $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine positiv definite Potenzreihe, so ist auch die transformierte Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ positiv definit.

Beweis. Man betrachte die Potenzreihe, in die sich für hinreichend große Werte von $|z|$ der n -te Näherungsbruch von $\overline{K}(z)$

$$\overline{K}_n(z) = \frac{\bar{c}_0^{(n)}}{z} - \frac{\bar{c}_1^{(n)}}{z^2} + \frac{\bar{c}_2^{(n)}}{z^3} - \dots$$

entwickeln läßt. Andererseits ist offenbar wegen (61) und (6)

$$(62) \quad \overline{K}_n(z) = K_n(z+\lambda) = \frac{c_0}{z+\lambda} - \frac{c_1}{(z+\lambda)^2} + \dots - \frac{c_{2n-1}}{(z+\lambda)^{2n}} + \frac{c_{2n}^{(n)}}{(z+\lambda)^{2n+1}} + \dots$$

²⁷⁾ Vgl. Stieltjes 9, S. 27; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 338–339.

²⁸⁾ O. Szász: „Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche“, Math. Ann. 76 (1915), S. 301–314; vgl. insbes. S. 304–305.

Die Koeffizienten $\bar{c}_\nu^{(n)}$ lassen sich demnach aus den Koeffizienten $c_\nu^{(n)}$ gleichfalls vermittelt der Transformationsformel (60) berechnen. Nun hängt aber $\bar{c}_\nu^{(n)}$ nur von denjenigen Koeffizienten $c_\mu^{(n)}$ ab, deren unterer Index $\mu \leq \nu$ ist. Daraus folgt aber wegen (6)

$$\bar{c}_\nu^{(n)} = c_\nu, \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

Nach den Ausführungen der Abschnitte 1. und 2. des § 1 ist aber diese Koeffizienteneigenschaft der Näherungsbrüche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Potenzreihe und Kettenbruch miteinander assoziiert sind. Hiermit ist die erste Behauptung des Satzes VII bewiesen.

Aus der Form von (61) ist unmittelbar ersichtlich, daß die Koeffizienten \bar{k}_ν des mit der transformierten Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs $\bar{K}(z)$ gleich k_ν und damit auch wegen (8) die Größen

$$(63) \quad \bar{A}_\nu = A_\nu$$

sind.

Es ist also nach Satz II des § 1 die transformierte Potenzreihe $\bar{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ dann und nur dann definit, wenn auch die ursprüngliche Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ positiv definit ist; w. z. b. w.

Aus Formel (62) folgt, wenn mit $\bar{U}_n(z)$ bzw. $\bar{V}_n(z)$ Zähler bzw. Nenner des Näherungsbruchs $\bar{K}_n(z)$ bezeichnet wird, daß die Polynome $\bar{U}_n(z)$ bzw. $\bar{V}_n(z)$ bis auf einen konstanten Faktor mit $U_n(z+\lambda)$ bzw. $V_n(z+\lambda)$ übereinstimmen. Den konstanten Faktor erhält man, indem man berücksichtigt, daß der Koeffizient von z^n in $\bar{V}_n(z)$ gleich 1 sein muß. Nun ist aber offenbar in $V_n(z+\lambda)$ der Koeffizient von z^n von selbst gleich 1, mithin

$$(64) \quad \bar{U}_n(z) = U_n(z+\lambda); \quad \bar{V}_n(z) = V_n(z+\lambda).$$

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich leicht angeben, wie sich die übrigen Größen des Kettenbruchs $K(z)$ bei der betrachteten Substitution transformieren.

2. Der Nutzen der angegebenen Transformation liegt vor allem darin, daß man durch sie die Existenz des korrespondierenden Kettenbruchs erzwingen kann. Es gilt nämlich der

Satz VIII. *Es sei $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Potenzreihe, deren zugehörige Koeffizientendeterminanten C_m sämtlich von Null verschieden sind, und $K(z)$ der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte Kettenbruch. Bezeichnet $V_n(z)$ den Nenner des Näherungsbruches n -ter Ordnung von $K(z)$, so existiert der mit*

$\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $\overline{S}(z)$ dann und nur dann, wenn die Werte von $V_n(z)$ für $z = \lambda$ für alle n von Null verschieden sind.

Daher läßt sich in jedem noch so kleinen reellen Intervall $a \leq z \leq b$ mindestens ein Wert $z = \lambda$ derart bestimmen, daß der mit $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $\overline{S}(z)$ existiert.

Beweis. Nach Satz IV ist für die Existenz des mit der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierenden Kettenbruchs $\overline{S}(z)$ notwendig und hinreichend, daß $V_n(0)$ für alle n von Null verschieden ist. Nun ist aber nach Formel (64) $V_n(0) = V_n(\lambda)$ und daraus folgt unmittelbar die erste Behauptung des Satzes VIII.

Die Menge aller im Intervall $a \leq z \leq b$ enthaltenen Nullstellen der Polynome $V_n(z)$ ist höchstens abzählbar unendlich, während die Menge aller Punkte des Intervalls $a \leq z \leq b$ von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Es muß also im Innern des Intervalls mindestens ein Punkt $z = \lambda$ existieren, in dem $V_n(z)$ für keinen Wert des Index n verschwindet. Dann existiert aber nach dem bereits bewiesenen Teil des Satzes VIII der mit $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $\overline{S}(z)$, w. z. b. w.

Kapitel II.

Der Existenzsatz für das Momentenproblem.

§ 5.

Formulierung des Momentenproblems.

1. In diesem Kapitel soll der Zusammenhang der bisher behandelten Kettenbrüche mit gewissen Integraldarstellungen untersucht werden, der von Stieltjes entdeckt wurde. Indessen wird in diesem Paragraphen die Beziehung zu den Kettenbrüchen noch ganz beiseite gelassen, um den Leser zunächst mit den Stieltjesschen Integralbildungen und den sich daran anschließenden Fragestellungen bekannt zu machen.

Definition IV. Eine im Intervall $-\infty < u < \infty$ definierte nirgends abnehmende reelle Funktion $\varphi(u)$ heißt eine Belegungsfunktion.

Für jedes beliebige endliche Intervall $a \leq u \leq b$ existieren die mit der Belegungsfunktion $\varphi(u)$ gebildeten Stieltjesschen Integrale

$$\int_a^b u^n d\varphi(u).$$

Existiert außerdem noch der Grenzwert

$$\lim_{\substack{a=-\infty \\ b=+\infty}} \int_a^b u^r d\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^r d\varphi(u) = c_r,$$

so heißt c_r das Moment r -ter Ordnung der Belegung $d\varphi(u)$. In diesem Falle werde die zugehörige Belegungsfunktion $\varphi(u)$, die durch die Belegung $d\varphi(u)$ in den Stetigkeitspunkten zunächst nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, ein für allemal durch die Beziehung

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^u d\varphi(v)$$

definiert.

Unter diesen Bedingungen werden endlich zwei Belegungen $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ nur dann als voneinander verschieden angesehen, wenn die zugehörigen Belegungsfunktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ mindestens in einem Stetigkeitspunkte von $\varphi(u)$ nicht den gleichen Wert annehmen.

Der Bezeichnung „Belegung“ für das Differential $d\varphi(u)$ liegt die Vorstellung zugrunde, daß durch die Belegungsfunktion $\varphi(u)$ eine Massenverteilung auf der Achse der reellen Zahlen charakterisiert wird, das heißt: sind $a < b$ zwei reelle Werte, so wird die Funktionsdifferenz $\varphi(b) - \varphi(a)$ als Maß einer Masse gedeutet, die im Intervall $a \leq u \leq b$ verteilt ist²⁹⁾.

Definition V. Ist die Stelle $u = \lambda$ eine Unstetigkeitsstelle der monotonen Funktion $\varphi(u)$, so nennen wir sie einen Kondensationspunkt der Belegung $d\varphi(u)$. Die Größe des Sprunges

$$M = \lim_{\delta=0} \varphi(\lambda + \delta) - \varphi(\lambda - \delta) = \varphi(\lambda + 0) - \varphi(\lambda - 0)$$

heißt die im Kondensationspunkte $u = \lambda$ konzentrierte Masse.

Die Stelle $u = \lambda$ heißt eine Wachstumsstelle der Belegungsfunktion $\varphi(u)$, wenn für jedes noch so kleine positive von Null verschiedene δ

$$\varphi(\lambda + \delta) - \varphi(\lambda - \delta) > 0$$

ist. Umgekehrt heißt das Intervall $a \leq u \leq b$ ein Konstanzintervall der Belegung $d\varphi(u)$, wenn

$$\varphi(b - 0) = \varphi(a + 0)$$

ist.

2. Bevor wir das Stieltjessche Momentenproblem genauer formulieren, schicken wir den Beweis eines Satzes voraus, der es ermöglicht, das Momentenproblem gleichzeitig in mehreren für uns nützlichen Fassungen auszusprechen.

²⁹⁾ Vgl. Stieltjes 8, S. 63–75. Vgl. auch die ausführliche Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der Stieltjesschen Integrale bei Perron, Lehrbuch, S. 362–374.

Definition VI. Jeder abgeschlossene, ganz im Endlichen gelegene Bereich der komplexen z -Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, soll kurz ein Bereich vom Typus Ω genannt werden.

Satz IX. Es sei $\varphi(u)$ eine Belegungsfunktion und es sei außerdem das Integral

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig konvergent³⁰⁾; endlich sei in der bekannten Poincaréschen Bezeichnungsweise³¹⁾

³⁰⁾ Existiert das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u)$, so ist die Belegung $d\varphi(u)$ durch die Funktion $f(z)$ eindeutig bestimmt, d. h.: sind die Belegungen $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ im Sinne der Definition IV voneinander verschieden, so können auch die Funktionen $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u}$ nicht einander gleich sein. Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 372–374.

Wird $z = x + iy$ gesetzt und ist Ω ein Bereich, in dem $y > 0$, Ω' ein weiterer Bereich, in dem $y < 0$ ist, so braucht das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ in Ω und Ω' nicht dieselbe analytische Funktion darzustellen, sondern es ist möglich:

1. daß die durch das Integral in Ω definierte Funktion sich überhaupt nicht über die Achse der reellen Zahlen hinaus fortsetzen läßt.

Beispiel: $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u)}{z+u} du$, wo $\Phi(u)$ eine reelle, nirgends negative Funktion von u ist, die in keinem noch so kleinen Teilintervall analytisch ist.

2. daß sich die durch das Integral in Ω definierte Funktion zwar über die Achse der reellen Zahlen hinaus fortsetzen läßt, aber die Fortsetzung in Ω' nicht

gleich dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ wird.

$$\text{Beispiel: } f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{z+u} du.$$

Im folgenden soll unter $f(z)$ immer diejenige Funktion verstanden werden, die in Ω bzw. Ω' gleich dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ ist, so daß in den eben charakterisierten

Fällen $f(z)$ für $y > 0$ eine andere analytische Funktion bedeutet als für $y < 0$.

Der Satz IX scheint uns neu zu sein.

Schluß von Fußnote 30 und Fußnote 31 auf der nächsten Seite.

$$(65) \quad f(z) \sim \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu}}{z^{\nu+1}},$$

wenn man z längs der Achse der positiv imaginären Zahlen über alle Grenzen wachsen läßt. Dann existieren die Momente aller Ordnungen der Belegung $d\varphi(u)$ und es wird

$$(66) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{\nu} d\varphi(u) = c_{\nu}.$$

Umgekehrt: Existieren die Momente c_{ν} jeder Ordnung der Belegung $d\varphi(u)$, so ist $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ eine in jedem Bereiche vom Typus Ω reguläre analytische Funktion, und man hat

$$f(z) \sim \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

wenn man z im Innern des Winkelraums

$$(67) \quad \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta \quad \text{bzw.} \quad -\pi + \delta \leq \arg z \leq -\delta$$

über alle Grenzen wachsen läßt.

Beweis:

I. Der zweite Teil des Satzes IX ist leicht zu beweisen. Aus der Existenz der Integrale (66) folgt offenbar, daß das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ in jedem Bereich vom Typus Ω der z -Ebene absolut und gleichmäßig konvergiert und daher nach einem bekannten Fundamentalsatz von Weierstraß dort eine reguläre analytische Funktion darstellt; denn es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\varphi(u)}{z+u} \right| \leq \frac{1}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u),$$

wenn mit ϱ die kürzeste Entfernung der Achse der reellen Zahlen von dem ins Auge gefaßten Bereich vom Typus Ω bezeichnet wird.

Statt der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω genügt es hier übrigens, die gewöhnliche Konvergenz des Integrals für $z = iy$, $y > 0$ vorauszusetzen.

²¹⁾ Den Sinn dieser oft angewandten Bezeichnungsweise erklärt die Definitionsgleichung (70) der asymptotischen Beziehung auf S. 270.

Andererseits ist

$$(68) \quad f(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u)}{z} - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u d\varphi(u)}{z^2} + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^{n-1} d\varphi(u)}{z^n} - \frac{(-1)^n}{z^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^n d\varphi(u)}{z+u}.$$

Außerdem ist für jeden Punkt des Winkelraums (67)

$$\left| \frac{u}{z+u} \right| \leq \frac{1}{\sin \delta},$$

folglich

$$(69) \quad \left| \frac{(-1)^n}{z^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^n d\varphi(u)}{z+u} \right| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^n d\varphi(u)}{|z|^{n+1} \sin \delta}.$$

Aus (66), (68) und (69) ergibt sich aber

$$\left| z^n \left(f(z) - \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} \right) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^n d\varphi(u)}{z+u} \right| \leq \frac{c_n}{|z| \sin \delta},$$

und daraus folgt bei festem n für das Innere des Winkelraums (67)

$$(70) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left(f(z) - \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} \right) = 0.$$

Dies ist aber bekanntlich die Poincarésche Definitionsgleichung für die Beziehung (65).

II. Den Beweis des ersten Teiles von Satz IX zerlegen wir in mehrere Schritte.

$$(\alpha) \text{ Beweis, daß } \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u) = c_0 \text{ ist.}$$

Aus der Voraussetzung (65) $f(z) \sim \Re\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z = iy$ folgt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} iy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{iy+u} = c_0.$$

Betrachtet man den reellen Teil²²⁾

$$\Re\left(iy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{iy+u}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}},$$

²²⁾ Ist $\alpha = \alpha + i\beta$, so werde unter $\Re(\alpha)$ der reelle Teil α von α verstanden.

so ergibt sich, da c_0 reell ist,

$$(71) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} i y f(i y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = c_0.$$

Gehen wir von der Annahme aus, das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u)$ sei divergent oder, falls es existiert, $> c_0$, so müßten sich, da $d\varphi(u)$ nirgends negativ ist, zwei reelle Konstanten a und b von der Beschaffenheit bestimmen lassen, daß auch

$$(72) \quad \int_a^b d\varphi(u) > c_0$$

ist.

Nun ist aber für das Integral längs des endlichen Intervalls

$$\int_a^b d\varphi(u) = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = c_0 \quad (\text{wegen (71)})$$

im Widerspruch mit der aus unserer Annahme gezogenen Folgerung (72). Es ist also

$$(73) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u) = c'_0 \leq c_0.$$

Andererseits ist aber für alle y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u),$$

also auch für den Grenzfall $y = \infty$ wegen (71)

$$c_0 \leq c'_0,$$

d. h. aber in Verbindung mit (73)

$$(74) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u) = c_0.$$

$$(\beta) \text{ Beweis, daß } \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\varphi(u) = c_2 \text{ ist.}$$

Setzt man

$$f_1(z) = -z \left(f(z) - \frac{c_0}{z} \right),$$

so ergibt sich offenbar wegen (68), indem man die bereits bewiesene Beziehung (74) benutzt, für $f_1(z)$ die Darstellung

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u d\varphi(u)}{z + u};$$

ferner genügt $f_1(z)$ wegen der Voraussetzung (65) der asymptotischen Beziehung

$$(75) \quad f_1(iy) \sim -iy \left(\mathfrak{P}\left(\frac{1}{iy}\right) - \frac{c_0}{iy} \right),$$

insbesondere ist

$$\lim_{y \rightarrow \infty} iy f_1(iy) = c_1.$$

Nun erhält man aber, wenn man Real- und Imaginärteil voneinander trennt,

$$(76) \quad iy f_1(iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3 d\varphi(u)}{u^2 + y^2},$$

also, da c_1 reell ist,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = c_1,$$

oder anders geschrieben

$$(77) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = c_1 + G(y),$$

wo $G(y)$ eine reelle Funktion von y bedeutet, die mit unbeschränkt wachsendem y gegen 0 konvergiert.

Andererseits folgt aber aus (75) auch

$$\lim_{y \rightarrow \infty} -iy(iy f_1(iy) - c_1) = c_2.$$

Wegen (76) und (77) kann man aber den Ausdruck linkerhand umformen und erhält

$$\lim_{y \rightarrow \infty} -iy \left(G(y) + iy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3 d\varphi(u)}{u^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3 d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} - iy G(y) \right) = c_2,$$

oder indem man wieder Real- und Imaginärteil voneinander trennt,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3 d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = c_2.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich aber, da $u^3 d\varphi(u)$ im Intervall $-\infty < u < \infty$ nirgends negativ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 d\varphi(u) = c_2$$

in derselben Weise wie in (a) die Beziehung (74) aus (71) abgeleitet wurde.

(γ) Beweis, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} u d\varphi(u) = c_1$ ist.

Aus der Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 d\varphi(u)$ folgt unmittelbar die Konvergenz von $\int_{-\infty}^{+\infty} |u| d\varphi(u)$; denn für $|u| \geq 1$ ist $|u| \leq u^2$.

Nun ist aber

$$\int_0^{\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} \leq \int_0^{\infty} u d\varphi(u);$$

da ferner $\int_0^{\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}}$ mit wachsendem y monoton wächst, so muß der Grenzwert

$$\lim_{y=\infty} \int_0^{\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}}$$

existieren, und man schließt nunmehr ebenso wie unter (α), da $u d\varphi(u)$ im Intervall $0 \leq u < \infty$ nirgends negativ ist, daß

$$\lim_{y=\infty} \int_0^{\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = \int_0^{\infty} u d\varphi(u)$$

ist. Ebenso ergibt sich

$$\lim_{y=\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = \int_{-\infty}^0 u d\varphi(u),$$

und aus beiden Beziehungen zusammen erhält man wegen (77)

$$\lim_{y=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u d\varphi(u)}{1 + \frac{u^2}{y^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} u d\varphi(u) = c_1.$$

(δ) Beweis der Momentengleichungen (66) für alle nicht negativen ganzzahligen Werte von ν .

Es seien die Beziehungen (66) für $\nu = 0, 1, \dots, 2n-1$ bereits bewiesen, dann ergibt sich aus (68), wenn wir die Belegung $u^{2n} d\varphi(u)$ mit $d\psi(u)$ bezeichnen,

$$f(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots - \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{1}{z^{2n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

und wegen der Voraussetzung (65)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} \sim \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{c_{2n+r}}{z^{r+1}}.$$

Aus dieser Beziehung folgt aber nach dem, was unter (α) und (γ) bewiesen ist,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} d\varphi(u) = c_{2n}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u d\varphi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n+1} d\varphi(u) = c_{2n+1}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: wenn die Beziehungen (66) für $r = 0, 1, \dots, 2n-1$ richtig sind, so sind sie auch für $r = 2n$ und $r = 2n+1$ richtig. Daraus folgt aber, da diese Beziehungen in (α) und (γ) bereits für $r = 0$ und $r = 1$ bewiesen wurden, die Gültigkeit von (66) für alle r . W. z. b. w.

3. Definition VII. Es sei eine unendliche Folge reeller Zahlen c_0, c_1, c_2, \dots vorgelegt. Dann nennt man das dieser Folge zugeordnete Momentenproblem die Frage nach einer im Intervall $-\infty < u < \infty$ definierten Belegungsfunktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen²³⁾ (im Sinne der Definitionen IV und V) von der Beschaffenheit, daß die Momente aller Ordnungen der zugehörigen Belegung $d\varphi(u)$ existieren und die Beziehungen

$$(66) \quad c_r = \int_{-\infty}^{+\infty} u^r d\varphi(u)$$

bestehen.

Das Momentenproblem heißt bestimmt oder unbestimmt, je nachdem eine einzige oder mehrere im Sinne der Definition IV voneinander verschiedene Belegungen $d\varphi(u)$ existieren, die den Beziehungen (66) genügen.

Stieltjes²⁴⁾ hat das Momentenproblem enger formuliert (vgl. Abschnitt 4. und 5. der Einleitung), indem er verlangt, daß die Koeffizienten c_r nicht durch die Integrale (66), sondern durch die spezielleren

$$c_r = \int_0^{\infty} u^r d\varphi(u)$$

²³⁾ Die Bedingung, daß die Belegungsfunktion $\varphi(u)$ unendlich viele Wachstumsstellen hat, dient nur dazu, den trivialen Fall auszuschalten, daß die aus den Koeffizienten c_r gebildeten Hankelschen Determinanten C_m für alle $m > n$ sämtlich verschwinden und der assoziierte Kettenbruch $K(z)$ nicht mehr unendlich ist.

²⁴⁾ Vgl. Stieltjes 8, S. 48–49, vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 415–416.

dargestellt werden. In dem Umstande, daß hier Belegungen nicht nur auf der Achse der positiven Zahlen, sondern auf der gesamten reellen Achse als Lösungen zugelassen werden, besteht die in der vorliegenden Arbeit untersuchte Erweiterung des Stieltjeschen Momentenproblems.

Der Satz IX ermöglicht eine andere mehr funktionentheoretische Formulierung des Momentenproblems, die das selbständige Interesse, das dieses Problem beansprucht, besser hervortreten läßt.

Definition VII'. Es sei eine formale Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ der Gestalt (1) vorgelegt. Dann soll unter dem der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblem die Frage nach einer Belegungsfunktion $\varphi(u)$ mit unendlich vielen Wachstumsstellen verstanden werden, die den beiden Bedingungen genügt:

1. Die mit diesem $\varphi(u)$ gebildete Funktion $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ soll in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω regulär analytisch sein.

2. Die Funktion $f(z)$ soll im Innern des Winkelraums (67) der Beziehung

$$f(z) \sim \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

genügen.

Aus Satz IX folgt unmittelbar, daß dann und nur dann, wenn die Belegung $d\varphi(u)$ diesen beiden Bedingungen genügt, die Momente dieser Belegung gleich den Koeffizienten c_r werden, so daß also die in den Definitionen VII und VII' angegebenen Formulierungen einander äquivalent sind.

Betrachtet man die mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte formale quadratische Form

$F(x) = \sum_{i,n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$, so gestatten die Momentengleichungen (66) eine charakteristische Normaldarstellung der Form $F(x)$, die sich als eine gewisse Verallgemeinerung der Darstellung (55) bzw. (56) der Abschnittsformen $F_n(x)$ auffassen läßt. Es ergibt sich nämlich, wie eine leichte formale Rechnung zeigt,

$$(78) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + u x_1 + u^2 x_2 + \dots)^2 d\varphi(u).$$

Benutzt man diesen Umstand, so gelingt es, das Momentenproblem auch sinngemäß der Form $F(x)$ zuzuordnen.

Definition VII'': Es sei eine formale quadratische Form $F(x) = \sum_{i,n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$ vorgelegt. Unter dem dieser Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblem soll die Frage nach einer Belegungsfunktion

$\varphi(u)$ mit unendlich vielen Wachstumsstellen verstanden werden, vermittelt der sich $F(x)$ in der Gestalt (78) darstellen läßt.

Offenbar ist auch diese dritte Fassung des Momentenproblems mit den beiden andern äquivalent.

4. Aus der letzten Fassung des Momentenproblems leitet man leicht eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung ab.

Satz X³⁵⁾. *Besitzt das der Form $F(x)$ zugeordnete Momentenproblem eine Lösung, so ist $F(x)$ positiv definit.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß $F(x)$ sich in der Gestalt (78) darstellen läßt, wobei $\varphi(u)$ eine Belegungsfunktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen bedeutet. Dann erhält man für die Abschnittsformen die Darstellung

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + ux_1 + \dots + u^{n-1}x_{n-1})^2 d\varphi(u),$$

die erkennen läßt, daß $F_n(x)$ für jedes n beständig > 0 ist; denn die n Veränderlichen x_0, x_1, \dots, x_{n-1} lassen sich offenbar nicht so bestimmen, daß $x_0 + ux_1 + \dots + u^{n-1}x_{n-1}$ an den unendlich vielen Wachstumsstellen von $\varphi(u)$ gleichzeitig verschwindet, ohne daß die x_r sämtlich gleich Null gesetzt werden. Nach Definition II heißt das aber nichts anderes, als daß die Form $F(x)$ positiv definit ist. W. z. b. w.

Die §§ 6–8 dieses Kapitels werden der Umkehrung von Satz X gewidmet sein; d. h. der Konstruktion einer Lösung des Momentenproblems, das einer positiv definiten Form oder, wie man nach Definition I und VII' auch sagen kann, einer positiv definiten Potenzreihe zugeordnet ist.

§ 6.

Belegungen endlicher Ordnung.

1. Bei der Formulierung des Momentenproblems wurde verlangt, daß die Belegungsfunktion, die die Lösung des Problems liefert, unendlich viele Wachstumsstellen hat. In diesem Paragraphen soll indessen von Belegungsfunktionen mit nur endlich vielen Wachstumsstellen die Rede sein, da die Lösung des Momentenproblems durch Grenzübergang innerhalb einer unendlichen Folge solcher Belegungen konstruiert werden wird.

Definition VIII. *Die Belegung $d\Phi(u)$ wird eine Belegung endlicher Ordnung genannt, wenn die zugehörige Belegungsfunktion $\Phi(u)$ nur endlich viele Wachstumsstellen hat.*

Eine isolierte Wachstumsstelle von $\Phi(u)$ ist offenbar eine Sprung-

³⁵⁾ Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 377–378.

stelle von $\Phi(u)$, d. h. ein Kondensationspunkt der Belegung $d\Phi(u)$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sämtliche Wachstumstellen von $\Phi(u)$. Dann sind die $n+1$ Intervalle $-\infty < u \leq \lambda_1 - 0$, $\lambda_1 + 0 \leq u \leq \lambda_2 - 0$, \dots , $\lambda_n + 0 \leq u < \infty$ Konstanzintervalle oder mit andern Worten: die Belegung endlicher Ordnung $d\Phi(u)$ besteht nur aus den in den n Kondensationspunkten $u = \lambda_1$, $u = \lambda_2, \dots, u = \lambda_n$ konzentrierten Massen N_1, N_2, \dots, N_n und verschwindet identisch an allen andern Stellen des Intervalls $-\infty < u < \infty$.

Die Momente der Belegung $d\Phi(u)$ existieren sämtlich, und zwar ist

$$(79) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^r d\Phi(u) = \sum_{\nu=1}^n N_\nu (\lambda_\nu)^r.$$

Das Integral linker Hand ist nur scheinbar ein Integral zwischen unendlichen Grenzen, da für $-\infty < u < \lambda_1$, $\lambda_n < u < \infty$ die Belegung $d\Phi(u) = 0$ ist.

2. Es soll nun einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine Menge von Belegungen endlicher Ordnung zugeordnet werden, deren Momente der m ersten Ordnungen gleich den m ersten Koeffizienten der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ sind.

Definition IX. Es sei $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine positiv definite Potenzreihe der Gestalt (1) und n eine positive ganze Zahl. Dann heißt $d\Phi_n(u)$ eine Belegung n -ter Ordnung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, wenn

1. die Belegungsfunktion $\Phi_n(u)$ genau n Wachstumstellen hat,
2. mindestens die $2n-1$ ersten Momente der Belegung

$$(80) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^r d\Phi_n(u) = c_r \quad (r = 0, 1, \dots, 2n-2)$$

sind.

Um die Belegungen endlicher Ordnung einer positiv definiten Potenzreihe zu konstruieren, greife man auf die verallgemeinerten Näherungsbrüche $K_n(z; t)$ des mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierten Kettenbruchs $K(z)$ zurück. Dann liefert uns die Partialbruchzerlegung von $K_n(z; t)$ für endliche reelle Werte des Parameters t Belegungen n -ter Ordnung.

Es ist nämlich, da die Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ als positiv definit vorausgesetzt wurde, nach den Formeln (50) und (26)

$$(81) \quad K_n(z; t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{N_\nu^{(n)}(t)}{z + \lambda_\nu^{(n)}(t)} \\ = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots + \frac{c_{2n-2}}{z^{2n-1}} - \frac{c_{2n-1} + t \Delta_{n-1}}{z^{2n}} + \frac{\gamma_{2n}(t)}{z^{2n+1}} - \dots,$$

wobei die $N_e^{(n)}(t)$ positive, die $\lambda_e^{(n)}(t)$ reelle Zahlen bedeuten, die noch von dem Parameter t abhängen. Außerdem seien die $\lambda_e^{(n)}(t)$ der Größe nach geordnet, so daß

$$\lambda_1^{(n)}(t) < \lambda_2^{(n)}(t) < \dots < \lambda_n^{(n)}(t)$$

ist.

Die Partialbruchzerlegung von $K_n(z; t)$ liefert für die Koeffizienten c_r die Darstellung:

$$(82) \quad c_r = \sum_{e=1}^n N_e^{(n)}(t) (\lambda_e^{(n)}(t))^r \quad (r = 0, 1, \dots, 2n-2).$$

Faßt man einen festen Wert $t = t_0$ ins Auge und bezeichnet man mit $d\Phi_n(u; t_0)$ die Belegung, die die Punkte $u = \lambda_e^{(n)}(t_0)$ ($e = 1, 2, \dots, n$) zu Kondensationspunkten mit den zugehörigen Massen $N_e^{(n)}(t_0)$ hat und für $u \neq \lambda_e^{(n)}(t_0)$ identisch verschwindet, so ist $d\Phi_n(u; t_0)$ eine Belegung n -ter Ordnung von $\mathfrak{P}(\frac{1}{z})$, wofern nur $t_0 \neq \infty$ ist. Denn erstens hat $d\Phi_n(u; t_0)$ genau n Kondensationspunkte und verschwindet sonst identisch, zweitens ist wegen (79) und (82)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^r d\Phi_n(u; t_0) = \sum_{e=1}^n N_e^{(n)}(t_0) (\lambda_e^{(n)}(t_0))^r = c_r \quad (r = 0, 1, \dots, 2n-2).$$

Um die Belegung $d\Phi_n(u; t)$ auch für den Wert $t = \infty$ zu definieren, berücksichtige man, daß nach Formel (25) $K_n(z; \infty) = K_{n-1}(z) = K_{n-1}(z; 0)$ gesetzt wurde. Dementsprechend setze man

$$(83) \quad d\Phi_n(u; \infty) = d\Phi_{n-1}(u; 0).$$

Mit Hilfe der Belegung $d\Phi_n(u; t)$ läßt sich die rationale Funktion $K_n(z; t)$ als Stieltjesches Integral darstellen; es ist nämlich

$$(84) \quad K_n(z; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_n(u; t)}{z+u} = \sum_{e=1}^n \frac{N_e^{(n)}(t)}{z + \lambda_e^{(n)}(t)}.$$

Die zugehörige Belegungsfunktion $\Phi_n(u; t)$ wird durch die Beziehungen definiert:

$$\begin{aligned} \Phi_n(u; t) &= 0 & \text{für} & \quad -\infty < u < \lambda_1^{(n)}(t) \\ \Phi_n(u; t) &= N_1^{(n)}(t) & \text{für} & \quad \lambda_1^{(n)}(t) < u < \lambda_2^{(n)}(t) \\ \Phi_n(u; t) &= N_1^{(n)}(t) + N_2^{(n)}(t) & \text{für} & \quad \lambda_2^{(n)}(t) < u < \lambda_3^{(n)}(t) \\ &\dots & & \dots \\ \Phi_n(u; t) &= N_1^{(n)}(t) + N_2^{(n)}(t) + \dots + N_n^{(n)}(t) & \text{für} & \quad \lambda_n^{(n)}(t) < u < \infty. \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß zu jeder Belegung $d\Phi^*(u)$ der Ordnung n von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ sich eine endliche reelle Konstante t_0 bestimmen läßt, derart, daß $d\Phi^*(u) = d\Phi_n(u; t_0)$ ist. Sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ die n Kondensationspunkte von $d\Phi^*(u)$ und M_1, M_2, \dots, M_n die dort konzentrierten Massen, so bilde man die Funktion

$$K_n^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^*(u)}{z+u} = \sum_{\rho=1}^n \frac{M_\rho}{z+\omega_\rho}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung von $K_n^*(z)$ folgt, daß $K_n^*(z)$ gleich einem Quotienten mit einem Polynom vom Grade $n-1$ im Zähler und einem Polynom vom Grade n im Nenner ist.

Da $d\Phi^*(u)$ als eine Belegung n -ter Ordnung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ vorausgesetzt wurde, so folgt aus der Integraldarstellung von $K_n^*(z)$ in Verbindung mit (80), daß sich $K_n^*(z)$ in die für hinreichend große Werte von $|z|$ konvergente Potenzreihe

$$(85) \quad K_n^*(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots + \frac{c_{2n-2}}{z^{2n-1}} - \frac{\alpha}{z^{2n}} + \dots$$

entwickeln läßt. Nunmehr zeige man, daß ein solcher Quotient von Polynomen, dessen Potenzreihenentwicklung durch die Reihe (85) gegeben ist, notwendig von der Form

$$K_n^*(z) = \frac{U_n(z) + t_0 U_{n-1}(z)}{V_n(z) + t_0 V_{n-1}(z)} = K_n(z; t_0) \quad (t_0 + \infty)$$

ist. Dann ist, da sich offenbar $K_n^*(z)$ nur auf eine Weise durch ein Stieltjesches Integral darstellen läßt,

$$d\Phi^*(u) = d\Phi_n(u; t_0).$$

Da wir im folgenden von dem Umstande, daß die Menge der Belegungen $d\Phi_n(u; t)$ alle Belegungen n -ter Ordnung von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ enthält, keinen Gebrauch machen, begnügen wir uns mit diesen kurzen Andeutungen des Beweises.

3. Im Falle $t = 0$ wird $K_n(z; 0) = K_n(z)$, d. h. gleich dem gewöhnlichen Näherungsbruch n -ter Ordnung von $K(z)$. Mithin sind offenbar nicht nur die $2n-1$ ersten Momente der zugehörigen Belegung $d\Phi_n(u; 0)$ gleich c_r , sondern wegen (6) hat man auch noch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n-1} d\Phi_n(u; 0) = \sum_{\rho=1}^n N_\rho^{(n)} (\lambda_\rho^{(n)})^{2n-1} = c_{2n-1}^{(n)},$$

⁸⁰⁾ Die Belegungsfunktion $\Phi_n(u; 0)$ findet sich bei Stieltjes 3, S. 67, vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 402 und Grommer, Dissertation (l. c. Anm.¹⁹⁾), S. 135.

während für $t \neq 0$, wegen (81)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n-1} d\Phi_n(u; t) = c_{2n-1} + t \Delta_{n-1} + c_{2n-1}$$

ist.

Besonders wichtig ist außer dem Falle $t=0$ auch der Fall $t = -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}$, in dem nach Formel (28)

$$K_n\left(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right) = \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$$

ist. Bezeichnet man die Belegung $d\Phi_n\left(u; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right)$ kurz mit $d\Psi_n(u)$, so wird wegen (84)

$$(86) \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_n(u)}{z+u}.$$

Im Falle $V_{n-1}(0) \neq 0$ ist $d\Psi_n(u)$ eine Belegung der Ordnung n , im Falle $V_{n-1}(0) = 0$ wegen (83) eine Belegung der Ordnung $n-1$.

Erinnert man sich an die Partialbruchzerlegung (51) bzw. (52) von $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$, so folgt, daß die Belegung $d\Psi_n(u)$ immer den Punkt $u=0$ zum Kondensationspunkt hat und daß die dort konzentrierte Masse $M^{(n)}$ nach Satz V gleich dem Minimum ist, das die Abschnittsform $F_n(x)$ auf der Ebene $x_0=1$ von $n-1$ Dimensionen annimmt. Die Anzahl der übrigen Kondensationspunkte $u = \omega_{\varepsilon}^{(n)}$ von $d\Psi_n(u)$ ist gleich $n-1$ bzw. $n-2$, je nachdem $V_{n-1} \neq 0$ bzw. $= 0$ ist.

§ 7.

Das Grommersche Auswahltheorem.

1. Das wichtigste Hilfsmittel, um aus einer unendlichen Folge von Belegungen endlicher Ordnung einer positiv definiten Potenzreihe eine Lösung des dieser Potenzreihe zugeordneten Momentenproblems zu gewinnen, liefert ein zuerst von Herrn Grommer bewiesenes Auswahltheorem⁸⁷⁾. Das von Herrn Grommer angegebene Verfahren, das tiefliegende Untersuchungen von Stieltjes über die Natur der Belegungen endlicher Ordnung benutzt, läßt sich indessen wesentlich vereinfachen, indem man einen neueren allgemeinen Satz von Herrn Carathéodory⁸⁸⁾ heranzieht, dessen Beweis weder

⁸⁷⁾ I. o. Anm. 17).

⁸⁸⁾ C. Carathéodory, Über die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen. Sitzber. Pr. Ak. Wiss. 30 (1920), S. 559–573, vgl. insbesondere S. 560–571.

Herr M. Riesz machte mich gelegentlich der zweiten Korrektur darauf aufmerksam, daß sich der Carathéodorysche Satz bereits in einer Arbeit von Herrn E. Helly

schwierige Betrachtungen, noch besondere Hilfsmittel erfordert. Der Carathéodorysche Satz lautet:

Ist eine unendliche Folge monotoner Funktionen, die unterhalb einer gemeinsamen festen endlichen Schranke bleiben,

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u), \dots$$

vorgelegt, so läßt sich aus dieser Folge eine unendliche Teilfolge von Funktionen

$$\varphi_{n_1}(u), \varphi_{n_2}(u), \dots, \varphi_{n_r}(u), \dots$$

auswählen und eine beschränkte monotone Funktion $\varphi(u)$ von der Beschaffenheit konstruieren, daß die Funktionen der Teilfolge $\varphi_{n_1}(u), \varphi_{n_2}(u), \dots$ mit wachsendem Index in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(u)$ gegen die Funktion $\varphi(u)$ konvergieren.

Wir verzichten auf die Angabe des völlig elementaren Beweises und verweisen auf die Originalabhandlung.

Dieser Satz läßt sich nun auf eine beliebige unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung einer Potenzreihe anwenden. Denn ist $d\Phi(u)$ eine Belegung endlicher Ordnung, so ist wegen (80)

$$(87) \quad \Phi(u) = \int_{-\infty}^u d\Phi(v) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi(u) = c_0.$$

Die Belegungsfunktionen endlicher Ordnung einer Potenzreihe bleiben also sämtlich unterhalb der gemeinsamen Schranke c_0 .

Um uns kürzer auszudrücken, definieren wir:

Definition X. *Eine unendliche Folge von Belegungen $d\varphi_1(u), d\varphi_2(u), \dots$ heißt konvergent, wenn eine Belegungsfunktion $\varphi(u)$ existiert, gegen die die vorgelegten Belegungsfunktionen $\varphi_r(u)$ in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(u)$ mit wachsendem r konvergieren.*

Indem man diese Ausdrucksweise benutzt, kann man den Spezialfall des Carathéodoryschen Satzes, auf den sich die weiteren Untersuchungen aufbauen, in der Weise aussprechen:

Satz XI. *Es sei $d\Phi^{(1)}(u), d\Phi^{(2)}(u), \dots, d\Phi^{(v)}(u), \dots$ eine beliebige unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$. Dann läßt sich aus dieser Folge eine unendliche konvergente Teilfolge von Belegungen auswählen.*

findet: Über lineare Funktionaloperationen, Sitzungsber. der k. Ak. d. Wiss. Wien, Math.-natw. Kl., 121, Abt. IIa, (1912), S. 265–297, vgl. insbes. S. 284–287.

Gleichzeitig teilte mir Herr M. Riesz mit, daß er bereits auf einem Vortrage der Math. Gesellschaft zu Stockholm im April 1918 das Grommersche Auswahlverfahren durch Anwendung des Hellyschen Satzes vereinfacht habe.

2. Aus Satz XI soll nunmehr ein Satz abgeleitet werden, der im wesentlichen mit dem Grommerschen Auswahltheorem übereinstimmt.

Satz XII²⁹⁾. Es sei

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \rightarrow \infty$$

eine unendliche Folge von Indizes und

$$t_{n_1}, t_{n_2}, t_{n_3}, \dots$$

eine Folge reeller Zahlen, unter denen auch die Werte 0 und ∞ zulässig sind. Ist dann

$$K_{n_1}(z; t_{n_1}), K_{n_2}(z; t_{n_2}), \dots$$

eine unendliche Folge von verallgemeinerten Näherungsbrüchen des mit einer positiv definiten Potenzreihe der Gestalt (1) assoziierten Kettenbruchs $K(z)$, so läßt sich aus dieser Folge eine unendliche Teilfolge von Näherungsbrüchen

$$K_{n'_1}(z; t_{n'_1}), K_{n'_2}(z; t_{n'_2}), \dots$$

auswählen, die in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig konvergiert.

In der Folge der Indizes n_1, n_2, \dots dürfen auch mehrere Indizes einander gleich sein, z. B. n_r und n_{r+1} , ohne daß die zugehörigen Zahlen t_{n_r} und $t_{n_{r+1}}$ einander gleich sind. Ist z. B. die Folge der in den Formeln (28) und (38) definierten Näherungsbrüche $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ vorgelegt, so entspricht dem die Folge

$$\begin{array}{l} \text{von Indizes } n_r \quad 1, 1, \quad 2, 2, \dots, \quad n, n, \dots \\ \text{von Zahlen } t_{n_r} \quad -\frac{1}{V_1(0)}, 0, \quad -\frac{V_1(0)}{V_2(0)}, 0, \dots, \quad -\frac{V_{n-1}(0)}{V_n(0)}, 0, \dots \end{array}$$

Vorbemerkung zum Beweise.

Nach den Ausführungen des § 6 ist jedem verallgemeinerten Näherungsbruch $K_{n_r}(z; t_{n_r})$ von $K(z)$ eine Belegung n_r -ter Ordnung $d\Phi_{n_r}(u; t_{n_r})$ von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ in der Weise zugeordnet, daß

$$K_{n_r}(z; t_{n_r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_{n_r}(z; t_{n_r})}{z+u}$$

ist (vgl. Formel (84)). Nach Satz XI läßt sich andererseits aus der unendlichen Folge von Belegungen $d\Phi_{n_r}(z; t_{n_r})$ eine unendliche konvergente Teilfolge von Belegungen $d\Phi_{n'_r}(z; t_{n'_r})$ auswählen; wir behaupten nunmehr, daß die zugehörige unendliche Teilfolge von Funktionen $K_{n'_r}(z; t_{n'_r})$ in

²⁹⁾ Vgl. Grommer, l. c. Anm. ¹³⁾ S. 137.

jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig konvergiert. Mit dem Nachweis dieser Behauptung ist dann Satz XII bewiesen.

Indem wir der bequemerem Schreibweise halber statt der Doppelindizes n'_n einfache Indizes einführen, die nun aber natürlich nicht mehr die genaue Ordnung der Belegung angeben, läßt sich diese Behauptung auch so formulieren:

Satz XII'. *Es sei $d\Phi^{(1)}(u)$, $d\Phi^{(2)}(u)$, ... eine unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, die gegen eine Belegung $d\varphi(u)$ konvergieren möge. Dann ist*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

eine in jedem Bereich \mathfrak{B} der z -Ebene vom Typus Ω reguläre analytische Funktion und die Folge von Funktionen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(n)}(u)}{z+u}$$

konvergiert dort gleichmäßig gegen die Funktion $f(z)$.

Beweis. Wird $z = x + iy$ gesetzt, so sei $|x| \leq X$ innerhalb \mathfrak{B} . Außerdem sei ϱ die kleinste Entfernung eines Punktes des Bereiches \mathfrak{B} von der Achse der reellen Zahlen.

Wir zeigen zunächst, daß $f(z)$ in jedem Bereich \mathfrak{B} vom Typus Ω eine reguläre analytische Funktion ist.

Aus $\Phi^{(n)}(u) \leq c_0$ (vgl. Formel (87)) folgt auch $\varphi(u) \leq c_0$, da nach Voraussetzung in Verbindung mit der Definition X die Folge der monotonen Funktionen $\Phi^{(n)}(u)$ in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(u)$ gegen $\varphi(u)$ konvergiert. Es existieren demnach, da $\varphi(u)$ außerdem auch monoton ist, die Grenzwerte

$$\lim_{u=-\infty} \varphi(u) \leq \lim_{u=+\infty} \varphi(u) \leq c_0.$$

Es ergibt sich daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\varphi(u)}{z+u} \right| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u)}{\varrho} \leq \frac{c_0}{\varrho},$$

und aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

absolut und gleichmäßig in jedem Bereich \mathfrak{B} vom Typus Ω konvergiert,

also nach dem Fundamentalsatz von Weierstraß eine in \mathfrak{B} analytische Funktion darstellt.

Es ist nunmehr noch nachzuweisen, daß sich zu jedem Bereich \mathfrak{B} der z -Ebene vom Typus Ω und zu jeder noch so kleinen positiven Größe ε eine Zahl $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon, \mathfrak{B})$ derart bestimmen läßt, daß

$$(88) \quad |D_\nu(z)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(\nu)}(u)}{z+u} \right| \leq \varepsilon$$

ist für alle $\nu \geq \nu_0$, wenn z ein beliebiger Punkt von \mathfrak{B} ist.

Die partielle Integration ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{(z+u)^2} du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(\nu)}(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi^{(\nu)}(u)}{(z+u)^2} du,$$

mithin

$$D_\nu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)}{(z+u)^2} du.$$

Man bestimme eine Konstante $R > X$ derart, daß

$$\int_R^{\infty} \frac{2c_0 du}{e^2 + (u-X)^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

ist. Nun ist aber für $|u| \geq R$

$$\left| \frac{1}{(z+u)^2} \right| \leq \frac{1}{e^2 + (u-X)^2},$$

also wegen $\Phi^{(\nu)}(u) \leq c_0$, $\varphi(u) \leq c_0$

$$(89) \quad \int_R^{\infty} \left| \frac{\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)}{(z+u)^2} \right| du \leq \int_R^{\infty} \frac{2c_0 du}{e^2 + (u-X)^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

und ebenso ergibt sich

$$(89') \quad \int_{-\infty}^{-R} \left| \frac{\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)}{(z+u)^2} \right| du \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es ist ferner

$$(89'') \quad \left| \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)}{(z+u)^2} du \right| \leq \frac{1}{e^2} \int_{-R}^{+R} |\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)| du.$$

Die Funktionen $|\varphi(u) - \Phi^{(\nu)}(u)|$ sind nun aber alle im Intervall $-R \leq u \leq R$ gleichmäßig beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar, da $\varphi(u)$ monoton und $\Phi^{(\nu)}(u)$ sogar streckenweise konstant ist

und nur endlich viele Sprungstellen besitzt. Außerdem ist nach Voraussetzung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} |\varphi(u) - \Phi^{(v)}(u)| = 0$$

in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(u)$ des Intervalls $-R \leq u \leq R$, d. h. in allen Punkten des Intervalls mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Masse Null. Dann ist aber nach einem bekannten Satze von Lebesgue⁴⁰⁾

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} |\varphi(u) - \Phi^{(v)}(u)| du = 0,$$

d. h. es existiert eine Zahl v_0 derart, daß

$$\int_{-R}^{+R} |\varphi(u) - \Phi^{(v)}(u)| du \leq \frac{\epsilon^2 \epsilon}{2}$$

ist, wenn $v \geq v_0$ ist.

Diese Abschätzung in Verbindung mit (89), (89') und (89'') ergibt die behauptete Beziehung (88), w. z. b. w.

Es gilt auch die leicht beweisbare Umkehrung von Satz XII', die uns oft nützliche Dienste leisten wird.

Satz XII''. Es sei $d\Phi^{(v)}(u)$ ($v = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$) eine unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ und es bestehe für einen Bereich \mathfrak{B} der z -Ebene vom Typus Ω die Beziehung

$$(90) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-x}^{+x} \frac{d\Phi^{(v)}(u)}{z+u} = \int_{-x}^{+x} \frac{d\varphi(u)}{z+u}, \quad 41);$$

dann ist im Sinne der Definition X

$$\lim_{v \rightarrow \infty} d\Phi^{(v)}(u) = d\varphi(u).$$

Beweis: Wir gehen von der Annahme aus, die Behauptung sei falsch, dann existiert ein Stetigkeitspunkt $u = u_0$ der Belegungsfunktion $\varphi(u)$, in dem

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Phi^{(v)}(u_0) \neq \varphi(u_0)$$

⁴⁰⁾ Vgl. z. B. Ch. J. de la Vallée Poussin: „Cours d'Analyse infinitésimale“, 3^{ème} édition, 1, Louvain 1914, S. 263.

⁴¹⁾ Der Satz XII'' läßt sich auch dann noch beweisen, wenn man die Gültigkeit der Beziehung (90) anstatt für den vollen Bereich \mathfrak{B} nur für abzählbar unendlich viele Punkte $z = z_\mu$ von \mathfrak{B} voraussetzt.

ist. Die Folge von Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ enthält also eine Teilfolge von Belegungen $d\Phi^{(v_k)}(u)$, die bei passender Wahl von ε sämtlich der Beziehung

$$(91) \quad |\Phi^{(v_k)}(u_0) - \varphi(u_0)| \geq \varepsilon$$

genügen.

Nach Satz XI läßt sich aber aus der Folge von Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ wiederum eine unendliche konvergente Teilfolge von Belegungen $d\Phi^{(v_k)}(u)$ auswählen. Es sei etwa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d\Phi^{(v_k)}(u) = d\varphi^*(u);$$

dann ist wegen (91) $\varphi^*(u_0) \neq \varphi(u_0)$, also auch $d\varphi^*(u) \neq d\varphi(u)$, da der Punkt $u = u_0$ ein Stetigkeitspunkt von $\varphi(u)$ ist.

Nach Satz XII' ist ferner gleichmäßig innerhalb \mathfrak{B}

$$(92) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(v_k)}(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi^*(u)}{z+u}.$$

Nun sind aber die beiden analytischen Funktionen $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi^*(u)}{z+u}$

in dem Bereiche \mathfrak{B} regulär und nach Anmerkung ³⁰⁾ auf Seite 268 voneinander verschieden, im Widerspruch mit der Voraussetzung (90), nach der die unendliche Teilfolge (92) der konvergenten Folge (90) den gleichen Grenzwert hat wie die ursprüngliche Folge (90). Damit ist die Annahme, die Behauptung sei falsch, widerlegt und der Satz XII" bewiesen.

§ 8.

Die Lösung des Momentenproblems.

1. Eine Lösung des einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems läßt sich nach den Vorbereitungen des vorigen Paragraphen leicht konstruieren. Die verallgemeinerten Näherungsbrüche $K_n(z; t)$ des mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierten Kettenbruches liefern, wie im § 6 näher beschrieben wurde, eine unendliche Menge von Belegungen endlicher Ordnung der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, die wieder mit $d\Phi_n(u; t)$ bezeichnet werden sollen. Nach Satz XI läßt sich aus dieser Menge eine unendliche konvergente Teilfolge von Belegungen $d\Phi_{n_k}(u; t_{n_k}) = d\Phi^{(v)}(u)$ auswählen.

Sei $d\varphi(u)$ die Belegung, gegen die die Folge der Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ konvergiert; dann behaupten wir, $d\varphi(u)$ ist eine Lösung des der positiv

definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems. Denn es besteht der

Satz XIII. Es sei $d\Phi^{(1)}(u)$, $d\Phi^{(2)}(u)$, ..., $d\Phi^{(v)}(u)$, ... eine unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung einer positiv definiten Potenzreihe mit den beiden Eigenschaften:

1. Bezeichnet m_r die Ordnung der Belegung $d\Phi^{(v)}(u)$, so sei

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r \leq \dots \rightarrow \infty.$$

2. Die Folge der Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ konvergiere gegen eine Belegung $d\varphi(u)$.

Dann ist $d\varphi(u)$ eine Lösung des der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems.

Beweis. Nach Satz XII' konvergieren die Funktionen

$$K^{(v)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(v)}(u)}{z+u}$$

in jedem Bereich \mathfrak{B} der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig gegen die

analytische Funktion $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$.

Damit, wie behauptet, $d\varphi(u)$ eine Lösung des der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems ist, muß nach Definition VII' im Innern des Winkelraums $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ die Beziehung

$$f(z) \sim \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

bestehen.

Ist für $v \geq v_0$ die Ordnung $m_v \geq n+1$, so wird nach der Definitionsgleichung (80) für Belegungen der Ordnung m_v von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$

$$K^{(v)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^{(v)}(u)}{z+u} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots - \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} - \frac{1}{z^{2n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z+u} u^{2n} d\Phi^{(v)}(u).$$

Also für $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, da dort

$$\left| \frac{z}{z+u} \right| \leq \frac{1}{\sin \delta}$$

ist,

$$|z^{2n}| \left| K^{(v)}(z) - \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} - \dots + \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} \right| \leq \frac{1}{|z| \sin \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2n} d\Phi^{(v)}(u) = \frac{c_{2n}}{|z| \sin \delta}.$$

Da die rechte Seite dieser Abschätzung von ν unabhängig ist, so gilt sie auch in dem gleichen Bereich für $f(z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} K^{(\nu)}(z)$. Es ergibt sich daher

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{2n} \left(f(z) - \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} - \dots + \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} \right) = 0.$$

Wegen der Voraussetzung $m_\nu \rightarrow \infty$ läßt sich diese Beziehung aber für jeden noch so großen Wert von n beweisen, d. h. aber nichts anderes als

$$(93) \quad f(z) \sim \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Um endlich noch zu zeigen, daß die zu $d\varphi(u)$ gehörige Belegungsfunktion $\varphi(u)$ unendlich viele Wachstumsstellen hat, schließt man zunächst aus der Beziehung (93), daß wegen Satz IX die Momentengleichungen

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\varphi(u)$$

erfüllt sind. Vermittels dieser Gleichungen läßt sich die n -te Abschnittsform von $F(x)$ für jedes noch so große n als Stieltjesches Integral

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + ux_1 + \dots + u^{n-1}x_{n-1})^2 d\varphi(u)$$

darstellen.

Angenommen nun, die Belegungsfunktion $\varphi(u)$ hätte nur endlich viele isolierte Wachstumsstellen $u = \lambda_1, u = \lambda_2, \dots, u = \lambda_p$, so ließe sich das Stieltjesche Integral für $F_n(x)$ auch als Summe von p Quadraten mit positiven Koeffizienten schreiben und es wäre für jedes noch so große n

$$F_n(x) = \sum_{\varrho=1}^p N_\varrho (x_0 + \lambda_\varrho x_1 + \dots + \lambda_\varrho^{n-1} x_{n-1})^2,$$

wenn die N_ϱ die Massen bedeuten, die in den Kondensationspunkten $u = \lambda_\varrho$ der Belegung $d\varphi(u)$ konzentriert sind.

Es sei nun $n > p$, dann lassen sich für die n Veränderlichen x_0, x_1, \dots, x_{n-1} von Null verschiedene Werte angeben, die den p linearen homogenen Gleichungen

$$x_0 + \lambda_\varrho x_1 + \dots + \lambda_\varrho^{n-1} x_{n-1} = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, p)$$

genügen, und für diese Werte der Veränderlichen würde offenbar $F_n(x)$ verschwinden. Dann könnte aber $F_n(x)$, und damit auch wegen Definition II die Form $F(x)$, nicht wie vorausgesetzt wurde positiv definit sein. Damit ist unsere Annahme, daß die Belegungsfunktion $\varphi(u)$ nur endlich viele Wachstumsstellen besitzt, widerlegt.

Die Belegung $d\varphi(u)$ genügt also allen Bedingungen der Definitionen VII bzw. VII' bzw. VII'' und damit ist Satz XIII bewiesen.

Unsere bisher erhaltenen Resultate bezüglich des einer Potenzreihe zugeordneten Momentenproblems kann man, indem man sich an Satz X des § 5 erinnert, in der Weise zusammenfassen:

Existenztheorem. Eine Lösung des einer Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ (einer quadratischen Form $F(x)$) zugeordneten Momentenproblems existiert dann und nur dann, wenn die Potenzreihe (die quadratische Form) positiv definit ist.

§ 9.

Die vollständige Konvergenz des Kettenbruchs $K(z)$.

1. Das Existenztheorem sagt nichts darüber aus, ob das einer positiv definiten Potenzreihe zugeordnete Momentenproblem eine einzige oder mehr als eine Lösung besitzt, d. h. in der Stieltjesschen Ausdrucksweise (Definition VII), ob das Momentenproblem bestimmt oder unbestimmt ist. Es sind andererseits bereits Beispiele sowohl von bestimmten wie unbestimmten Momentenproblemen bekannt⁴²⁾. Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen der Bestimmtheit bzw. Unbestimmtheit des Momentenproblems und den Konvergenzeigenschaften des zugehörigen assoziierten Kettenbruchs $K(z)$ untersucht werden, und zwar wird in diesem Paragraphen ein Satz über die Konvergenz von $K(z)$ bewiesen, für den Fall, daß das Momentenproblem bestimmt ist.

Definition XI. Der Kettenbruch $K(z)$ bzw. $S(z)$ heißt einfach konvergent, wenn seine Näherungsbrüche $K_n(z)$ bzw. $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ sich in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig einem Grenzwert $f(z)$ nähern.

Wir sagen ferner: der Kettenbruch $K(z)$ konvergiert vollständig gegen die Funktion $f(z)$, wenn zu jeder positiven beliebig kleinen Zahl ε und jedem beliebigen Bereich \mathfrak{B} vom Typus Ω sich eine Zahl N , die nur von ε und dem Bereich \mathfrak{B} abhängt, von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß

$$(94) \quad |K_n(z; t) - f(z)| \leq \varepsilon$$

ist für alle $n \geq N$, für jede beliebige reelle Zahl t (den Wert $t = \infty$ mit eingeschlossen) und für jeden Punkt z des Bereiches \mathfrak{B} ⁴³⁾.

⁴²⁾ Vgl. z. B. H. Hamburger, „Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche“, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 186–222, vgl. insbes. S. 214–220; siehe auch dort die näheren Literaturangaben Anm. 17) S. 199.

⁴³⁾ Schon Herr G. Hamel hat es als zweckmäßig erkannt, bei einigen funktionentheoretischen Fragestellungen die Konvergenz eines unendlichen Kettenbruchs anders als üblich zu definieren, indem man mehr verlangt als nur die Konvergenz der ge-

Ist $K(z)$ vollständig konvergent, so ist $K(z)$ und, falls er existiert, auch der korrespondierende Kettenbruch $S(z)$ sicherlich einfach konvergent, denn es ist

$$K_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = K_n(z; 0); \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = K_n\left(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right),$$

und beide Folgen von Näherungsbrüchen konvergieren auf Grund der Definitionseigenschaften der vollständigen Konvergenz von $K(z)$ in jedem Bereich vom Typus Ω gleichmäßig gegen ein und dieselbe Funktion $f(z)$. Es wird an einer späteren Stelle gezeigt werden, daß umgekehrt aus der einfachen Konvergenz von $S(z)$ noch nicht die vollständige Konvergenz von $K(z)$ folgt.

2⁴⁴). Den eigentümlichen Charakter der vollständigen Konvergenz zeigt eine einfache Überlegung. Es sei $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \dots$ eine beliebige unendliche Folge reeller oder komplexer Größen. Es sei ferner z_0 ein fester nicht reeller Punkt. Dann läßt sich offenbar eine Folge reeller oder komplexer Zahlen t_n bestimmen, deren jede einzelne der Beziehung

$$(95) \quad K_n(z_0; t_n) = \kappa_n$$

genügt. Konvergiert nun $K(z)$ vollständig gegen $f(z)$, so ist, damit für alle hinreichend großen n die Gleichungen (95) reelle Werte für t_n ergeben, wegen (94) notwendig, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = f(z_0)$ ist.

Die Eigenschaften der vollständigen Konvergenz sollen nunmehr durch einige speziellere Betrachtungen aufgeklärt werden.

Der Kettenbruch $K(z)$ konvergiere vollständig gegen die Funktion $f(z)$. Man fixiere einen bestimmten nicht reellen Wert von z . Dann wird durch die in t lineare Transformation

$$(96) \quad \zeta = K_n(z; t) = \frac{U_n(z) + tU_{n-1}(z)}{V_n(z) + tV_{n-1}(z)},$$

da $U_n(z)V_{n-1}(z) - U_{n-1}(z)V_n(z) = \Delta_{n-1} \neq 0$ ist, die komplexe t -Ebene konform auf die ζ -Ebene abgebildet. Insbesondere wird der Achse der reellen Zahlen der t -Ebene ein Kreis \mathfrak{P}_n vom Radius ϱ_n in der ζ -Ebene entsprechen.

wöhnlichen Näherungsbrüche. Vgl. dessen Arbeiten: „Über einen limitär-periodischen Kettenbruch“, Arch. d. Math. u. Phys. 27 (1918), S. 37–43, vgl. insbes. S. 42–43 und „Eine charakteristische Eigenschaft beschränkter analytischer Funktionen“, Math. Ann. 78 (1918), S. 257–269, vgl. insbes. S. 260.

⁴⁴) Die in diesem Abschnitt bewiesenen Eigenschaften der vollständigen Konvergenz dienen nur dazu, dem Leser eine Anschauung von der Eigenart dieses Begriffes zu geben und werden im folgenden nicht mehr benutzt werden. Der Leser kann daher ohne Schaden für das Verständnis des Folgenden gleich mit der Lektüre des Abschnittes 3 dieses Paragraphen auf Seite 292 fortfahren.

Faßt man z als einen komplexen Parameter der Substitution (96) auf, so wird die Abbildung und damit auch der Kreis \mathfrak{K}_n samt dem Radius $\varrho_n = \varrho_n(z)$ gleichfalls von dem komplexen Parameter z abhängen. Wir behaupten nunmehr: *der Radius $\varrho_n(z)$ konvergiert mit wachsendem n gleichmäßig in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω gegen 0.*

Angenommen, diese Behauptung sei falsch, so müßte sich eine Größe ε , eine unendliche Folge von Punkten $z_1, z_2, \dots, z_r, \dots$, die sämtlich innerhalb eines Bereiches \mathfrak{B} vom Typus Ω gelegen sind, und eine unendliche Folge von Indizes $n_1 < n_2 < \dots < n_r < \dots$ derart bestimmen lassen, daß die Radien

$$\varrho_{n_r}(z_r) > \varepsilon$$

sind; hierbei sei $\varrho_{n_r}(z_r)$ der Radius des Kreises \mathfrak{K}_{n_r} , auf den die Achse der reellen Zahlen der t -Ebene durch die Substitution

$$(97) \quad \zeta = K_{n_r}(z_r; t)$$

abgebildet wird.

Nun läßt sich aber auf jedem Kreise \mathfrak{K}_{n_r} ein Punkt $\zeta^{(v)}$ finden, der von dem Punkte $\zeta = f(z_r)$ mindestens die Entfernung $\varrho_{n_r}(z_r)$ hat.

Andererseits entspricht dem Punkte $\zeta^{(v)}$ auf dem Kreise \mathfrak{K}_{n_r} ein Punkt $t^{(v)}$ der reellen Achse der t -Ebene, der durch die Substitution (97) in den Punkt $\zeta^{(v)}$ übergeführt wird. Es ergibt sich also für alle v

$$(98) \quad |\zeta^{(v)} - f(z_r)| = |K_{n_r}(z_r; t^{(v)}) - f(z_r)| \geq \varrho_{n_r}(z_r) > \varepsilon.$$

Da aber nach Voraussetzung $K(z)$ vollständig gegen $f(z)$ konvergiert, so läßt sich eine ganze positive Zahl N derart bestimmen, daß für alle $n_r > N$, alle reellen Werte von t und alle Punkte z des Bereiches \mathfrak{B} , mithin um so mehr für alle Werte $t^{(v)}$ und alle Punkte z_r ,

$$|K_{n_r}(z; t) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, im Widerspruch mit der aus unserer ursprünglichen Annahme abgeleiteten Beziehung (98).

Es ist also gleichmäßig innerhalb \mathfrak{B}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(z) = 0.$$

Es sei umgekehrt $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ eine bestimmte unendliche Folge reeller Zahlen, wobei der Wert ∞ auch zulässig ist; besteht die Beziehung

$$(99) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z; t_n) = f(z)$$

gleichmäßig in jedem Bereich \mathfrak{B} vom Typus Ω und ist außerdem gleichmäßig in \mathfrak{B}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(z) = 0,$$

so konvergiert $K(z)$ vollständig gegen $f(z)$.

Denn dann ist bei beliebig vorgegebenem positiven ε innerhalb eines beliebig vorgegebenen Bereiches \mathfrak{B} vom Typus Ω bei passender Wahl von N_1 für $n \geq N_1$

$$(100) \quad |K_n(z; t_n) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Außerdem existiert eine Zahl N_2 von der Beschaffenheit, daß für jeden Punkt des Bereiches \mathfrak{B} und für $n \geq N_2$

$$(101) \quad \varrho_n(z) \leq \varepsilon$$

ist.

Nun ist aber, da der Punkt $\zeta = K_n(z; t)$ für jeden beliebigen reellen Wert von t auf einem Kreise vom Radius $\varrho_n(z)$ liegt,

$$|K_n(z; t_n) - K_n(z; t)| \leq 2\varrho_n(z).$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit (100) und (101), wenn N die größere der beiden Zahlen N_1 und N_2 bedeutet, für $n \geq N$, für jeden Punkt z des Bereiches \mathfrak{B} und alle reellen Werte von t

$$\begin{aligned} |K_n(z; t) - f(z)| &\leq |K_n(z; t) - K_n(z; t_n)| + |K_n(z; t_n) - f(z)| \\ &\leq 2\varrho_n(z) + \varepsilon \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist aber in Rücksicht auf die Definition XI die vollständige Konvergenz des Kettenbruchs $K(z)$ nachgewiesen.

Ist $K(z)$ mit einer positiv definiten Potenzreihe assoziiert, so konvergiert, wie im § 13 bewiesen wird⁴⁹⁾, mindestens die Folge von Näherungsbrüchen $K_n(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)}$ mit wachsendem n gleichmäßig in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω . Für diesen Fall ist also die eine Bedingung (99) für die vollständige Konvergenz immer von selbst erfüllt. Indem man nunmehr alle Resultate dieses Abschnittes zusammenfaßt, erhält man den Satz:

Ist $K(z)$ mit einer positiv definiten Potenzreihe assoziiert, so konvergiert $K(z)$ dann und nur dann vollständig, wenn gleichmäßig in jedem Bereiche vom Typus Ω die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(z) = 0$ besteht.

3. Satz XIV. *Es sei das der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}(\frac{1}{z})$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt und $d\varphi(u)$ seine Lösung. Ist $d\Phi^{(1)}(u), d\Phi^{(2)}(u), \dots, d\Phi^{(r)}(u), \dots$ eine beliebige unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung von $\mathfrak{P}(\frac{1}{z})$ und ist — unter n_r die Ordnung von $d\Phi^{(r)}(u)$ verstanden — $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq \dots \rightarrow \infty$, so kon-*

⁴⁹⁾ Vgl. Satz XIX auf S. 310.

vergiert die Folge von Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ gegen die Lösung $d\varphi(u)$ des vorgelegten Momentenproblems.

Außerdem ist der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ vollständig konvergent, und zwar konvergiert $K(z)$ gegen die Funktion

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst den ersten Teil des Satzes und gehen von der Annahme aus, es existiere eine unendliche Folge von Belegungen $d\Phi^{(v)}(u)$ ($n \rightarrow \infty$) der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$, die nicht gegen die Lösung $d\varphi(u)$ der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten, nach Voraussetzung bestimmten Momentenproblems konvergiert; dann folgt ebenso wie beim Beweise von Satz XII" die Existenz eines Stetigkeitspunktes $u = u_0$ von $\varphi(u)$, einer positiven Konstante ε und einer unendlichen Teilfolge von Belegungen $d\Phi^{(r_k)}(u)$, die in der Folge der $d\Phi^{(v)}(u)$ enthalten ist, wobei die $d\Phi^{(r_k)}(u)$ den beiden Bedingungen genügen:

$$(\alpha) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_{r_k} = \infty,$$

$$(\beta) \quad \left| \Phi^{(r_k)}(u_0) - \varphi(u_0) \right| \geq \varepsilon \quad (\text{für alle } k).$$

Aus der Folge der Belegungen $d\Phi^{(r_k)}(u)$ läßt sich nach Satz XI eine weitere konvergente Teilfolge von Belegungen $d\Phi^{(r'_k)}(u)$ auswählen, und zwar sei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d\Phi^{(r'_k)}(u) = d\varphi^*(u).$$

Wegen (α) ist aber nach Satz XIII die Belegung $d\varphi^*(u)$ eine Lösung des der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems; wegen (β) ist andererseits

$$\left| \Phi^{(r'_k)}(u_0) - \varphi(u_0) \right| \geq \varepsilon,$$

mithin auch

$$\varphi^*(u_0) \neq \varphi(u_0).$$

Da aber der Punkt $u = u_0$ ein Stetigkeitspunkt von $\varphi(u)$ ist, so sind die Belegungen $d\varphi(u)$ und $d\varphi^*(u)$ zwei voneinander verschiedene Lösungen des vorgelegten Momentenproblems, im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß das Momentenproblem bestimmt ist. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Um auch den zweiten Teil zu beweisen, gehen wir wieder von der Annahme aus, die in ihm ausgesprochene Behauptung sei falsch, es existiere

also eine positive Konstante ε , eine unendliche Folge von Indizes $n_1 \leq n_2 \leq \dots \rightarrow \infty$, eine unendliche Folge reeller Zahlen t_1, t_2, \dots und außerdem eine unendliche Folge komplexer Zahlen z_1, z_2, \dots , die sämtlich ganz im Innern eines Bereiches der z -Ebene vom Typus Ω liegen, derart, daß die Beziehung besteht

$$(102) \quad \left| K_{n_r}(z_r; t_r) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z_r + u} \right| \geq \varepsilon \quad (\text{für alle } r).$$

Da andererseits

$$K_{n_r}(z; t_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_{n_r}(u; t_r)}{z + u}$$

ist, so kann nach Satz XII' wegen (102) die Folge der Belegungen endlicher Ordnung $d\Phi_{n_r}(u; t_r)$ nicht gegen die Belegung $d\varphi(u)$ konvergieren. Dies widerspricht aber dem bereits bewiesenen ersten Teile des Satzes XIV. Also war unsere ursprüngliche Annahme falsch und der Satz XIV ist vollständig bewiesen.

Zusatz zu Satz XIV. *Ist das der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt und existiert der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $S(z)$, so ist dieser einfach konvergent.*

Denn wie oben gezeigt wurde, folgt aus der vollständigen Konvergenz des assoziierten Kettenbruchs $K(z)$ unmittelbar die einfache Konvergenz von $S(z)$.

In dem folgenden Kapitel und einem zweiten, später erscheinenden Teile soll nun die viel tiefer liegende Umkehrung des Satzes XIV bewiesen werden, so daß man als eins der Hauptziele dieser Untersuchungen den Beweis des Satzes bezeichnen kann: Der Kettenbruch $K(z)$ mit reellen Koeffizienten l_r , mit positivem k_1 und negativen k_r ($r \geq 2$) ist dann und nur dann vollständig konvergent, wenn das der assoziierten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt ist. Gleichzeitig werden sich auch brauchbare Kriterien einerseits für die Bestimmtheit des Momentenproblems, andererseits für die einfache Konvergenz des mit der positiv definiten Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs $K(z)$ und — falls er existiert — des mit ihr korrespondierenden Kettenbruchs $S(z)$ ergeben.

Kapitel III.

Kriterien für die Bestimmtheit des Momentenproblems
und die Konvergenz der zugehörigen Kettenbrüche.

§ 10.

Das einer uneigentlich definiten Form zugeordnete Momentenproblem.

1. Satz XV. Ist $F(x) = \sum_{i,n=0}^{\infty} c_{i+n} x_i x_n$ eine uneigentlich definite positive

Form, so ist das zugeordnete Momentenproblem bestimmt.

Der mit $F(x)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ ist daher in diesem Falle nach Satz XIV vollständig konvergent.

Beweis. Nach dem Existenztheorem des vorigen Kapitels muß das zu $F(x)$ gehörige Momentenproblem mindestens eine Lösung besitzen. Es sei $d\varphi(u)$ eine solche Lösung, es sei ferner $d\Phi_m(u)$ eine beliebige Belegung m -ter Ordnung der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\Pi(u)$ ein Polynom höchstens vom Grade $2m-2$ in u , dessen Koeffizienten beliebige Funktionen des Parameters z sein mögen. Über dieses Polynom wird später passend verfügt werden. Dann ist offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(u) d\Phi_m(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(u) d\varphi(u);$$

denn es ist nach Definition IX für $\nu \leq 2m-2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\Phi_m(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\varphi(u) = c_\nu.$$

Hieraus ergibt sich

$$(103) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z+u} - \Pi(u) \right] d\varphi(u) \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z+u} - \Pi(u) \right] d\Phi_m(u).$$

Diese Formel ist zum ersten Male von Markoff benutzt worden⁴⁶⁾. Wir suchen nunmehr durch geeignete Wahl von $\Pi(u)$ die Differenz linker Hand von (103) hinreichend klein zu machen.

⁴⁶⁾ A. Markoff, Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. Acta Math. 19 (1895), vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 385–387. O. Perron, Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche. Math. Ann. 74 (1913), S. 545–554. O. Szász, l. c. Anm. ⁴⁵⁾.

Es sei $n \leq m$. Setzt man

$$\Pi(u) = \frac{\frac{Q_{2n-1}^2(z)}{z^2} - \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2}}{\frac{Q_{2n-1}^2(z)}{z^2} (z+u)},$$

so ist $\Pi(u)$ ein Polynom vom Grade $2n-3 < 2m-2^{(4)}$ in u .

Indem man diesen Wert für $\Pi(u)$ in die Markoffsche Formel (103) einsetzt, erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2}}{\frac{Q_{2n-1}^2(z)}{z^2} (z+u)} d\varphi(u) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2}}{\frac{Q_{2n-1}^2(z)}{z^2} (z+u)} d\Phi_m(u).$$

Es sei jetzt $z = x + iy$, $y > 0$, dann ergibt sich

$$(104) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{x+iy+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{x+iy+u} \right| \leq \frac{1}{|y| \left| \frac{Q_{2n-1}^2(x+iy)}{(x+iy)^2} \right|} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\varphi(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\Phi_m(u) \right].$$

Da das Polynom $\frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2}$ höchstens vom Grade $2n-2 \leq 2m-2$ ist, so ist

$$(105) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\Phi_m(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\varphi(u).$$

Bedeutet \mathfrak{S} die in § 1 definierte symbolische Operation, so folgt

$$\mathfrak{S}\{u^v\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\varphi(u) = c_v.$$

Die Beziehungen (15) des § 1 lassen sich daher in der Form schreiben

$$(106) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^v V_n(-u) d\varphi(u) = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-1).$$

Daraus folgt aber wegen der Definitionsgleichungen (27) des § 2 (vgl. auch Formel (37))

$$(107) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^v Q_{2n-1}(-u) d\varphi(u) = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n-2).$$

⁽⁴⁾ Im Falle $V_n(0) = 0$ erniedrigt sich der Grad des Polynoms $\Pi(u)$ noch um zwei, wie man aus den Formeln (27) des § 2 unmittelbar erkennt.

Setzt man

$$Q_{2n-1}(-u) = -\mu_n u + \mu_n^{(2)} u^2 + \dots + \mu_n^{(n)} u^n,$$

unter μ_n die Konstante der Formeln (57) und (58) verstanden, so wird

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\varphi(u) &= \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}(-u)}{-u} d\varphi(u) + \sum_{\nu=0}^{n-2} \mu_n^{(\nu+2)} \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu Q_{2n-1}(-u) d\varphi(u) \\ &= \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}(-u)}{-u} d\varphi(u) \end{aligned} \right.$$

wegen (107).

Nun ist aber nach Formel (42) des § 2

$$\frac{Q_{2n-1}(-u)}{-u} = \frac{1}{\delta_0} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{V_\nu(-u) V_\nu(0)}{\delta_\nu},$$

also wegen (106)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}(-u)}{-u} d\varphi(u) = \frac{c_0}{\delta_0} = 1.$$

Mithin ergibt sich in Verbindung mit (105) und (108)

$$(109) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_{2n-1}^2(-u)}{u^2} d\Phi_m(u) = \mu_n^{(4)}.$$

Sind ferner $\omega_\nu^{(n)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n-1$) die von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung $Q_{2n-1}(-z) = 0$, so ist

$$(110) \quad \frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = \mu_n \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 + \frac{z}{\omega_\nu^{(n)}} \right).$$

Setzt man $x=0$, $y \geq \delta > 0$ und berücksichtigt man die Beziehung

$$\left| 1 + \frac{iy}{\omega_\nu^{(n)}} \right| \geq 1, \text{ so ist}$$

$$\left| \frac{Q_{2n-1}^2(iy)}{(iy)^2} \right| \geq \mu_n^2.$$

Dies in (104) eingesetzt, ergibt in Verbindung mit (109) die Abschätzung

$$(111) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{iy+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{iy+u} \right| \leq \frac{2}{\delta \mu_n}.$$

⁴⁹⁾ Vgl. Stieltjes 8, S. 29.

Nun war aber die Form $F(x)$ als uneigentlich definit vorausgesetzt. Dann ist nach Satz VI des § 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} a_{2r+1} = \infty.$$

Da sich andererseits in (111) n beliebig groß wählen läßt, sofern nur $m \geq 2n + 1$ bleibt, so folgt gleichmäßig für $y \geq \delta$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{iy+u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{iy+u} \right) = 0.$$

Diese Beziehung gilt für jede beliebige Lösung $d\varphi(u)$ des der Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblems; durch sie ist aber die Funktion

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

und damit auch die Belegung $d\varphi(u)$ (vgl. die Anm.²⁰) auf S. 268) eindeutig bestimmt. Damit ist der Satz XV bewiesen.

2. Wir wollen aus Satz XV noch eine wichtige Folgerung ziehen.

Satz XVI: *Es sei $F(x)$ eine positiv definite Form, M wie üblich der Grenzwert der Minima $M^{(n)}$ der Abschnittsformen $F_n(x)$ für $x_0 = 1$ (vgl. § 3). Dann existiert, gleichgültig ob das der Form $F(x)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt oder unbestimmt ist, eine und nur eine Belegung $d\psi(u)$, die eine Lösung des der Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblems liefert und im Punkte $u = 0$ die Masse M konzentriert hat.*

Hingegen existiert keine Lösung $d\psi(u)$, bei der im Nullpunkte mehr Masse als M konzentriert ist.

Zusatz. *Da für eine uneigentlich definite Form $F(x)$ die Größe $M = 0$ wird, so kann, wenn die Belegung $d\psi(u)$ eine Lösung des der uneigentlich definiten Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblems ist, der Punkt $u = 0$ kein Kondensationspunkt von $d\psi(u)$ sein.*

Beweis. Wir beweisen zunächst den zweiten Teil des Satzes und gehen von der Annahme aus, es existiere eine Belegung $d\varphi(u)$, bei der im Nullpunkte eine Masse $M' > M$ konzentriert ist. Man bilde die Belegung $d\varphi^*(u)$, die aus $d\varphi(u)$ hervorgeht, indem man im Nullpunkte die Masse M' entfernt. Die Belegung $d\varphi^*(u)$ würde dann offenbar eine Lösung des der Form $F(x) - M'x_0^2$ zugeordneten Momentenproblems liefern, die nach Satz X des § 5 positiv definit sein müßte. Dies widerspricht aber der Behauptung des Satzes VI aus § 3, nach der die Form $F(x) - M'x_0^2$

nicht definit sein kann, wenn $M' > M$ ist. Es kann also höchstens $M' \leq M$ sein.

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, betrachte man die Form $F(x) - Mx_0^2$, die nach Satz VI des § 3 positiv, und zwar uneigentlich definit ist; das ihr zugeordnete Momentenproblem ist also nach Satz XV bestimmt und besitzt genau eine Lösung $d\psi^*(u)$.

Bildet man eine neue Belegung $d\psi(u)$, indem man im Nullpunkte zu $d\psi^*(u)$ die Masse M hinzufügt, so ist offenbar $d\psi(u)$ eine Lösung des der Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblems, und die im Nullpunkte von $d\psi(u)$ konzentrierte Masse ist mindestens gleich M . Da aber diese Masse, wie bereits bewiesen wurde, nicht $> M$ sein kann, so ist sie genau gleich M . Die Belegung $d\psi(u)$ genügt also den in Satz XVI gestellten Bedingungen.

Angenommen endlich, es existiere noch eine zweite Belegung $d\varphi(u)$, die von $d\psi(u)$ verschieden ist, zu $F(x)$ gehört und im Punkte $u=0$ die Masse M konzentriert hat, so bilde man die beiden Belegungen $d\psi^*(u)$ und $d\varphi^*(u)$ die aus $d\psi(u)$ bzw. $d\varphi(u)$ hervorgehen, indem man von ihnen die Masse M im Punkte $u=0$ entfernt. Dann wird offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi^*(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi^*(u) = c_0 - M$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\psi^*(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\varphi^*(u) = c, \quad \text{für } v \geq 1.$$

Die Belegungen $d\psi^*(u)$ und $d\varphi^*(u)$ gehören also beide zur Form $F(x) - Mx_0^2$.

Da aber, wie oben bemerkt wurde, nach Satz VI und Satz XV das der Form $F(x) - Mx_0^2$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt ist, so ergibt sich $d\psi^*(u) = d\varphi^*(u)$ und damit auch $d\psi(u) = d\varphi(u)$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit sind alle Behauptungen von Satz XVI bewiesen.

Definition XII. Wir nennen eine Belegung $d\psi(u)$ kurz die *Maximalbelegung* von $F(x)$ oder auch von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, wenn $d\psi(u)$ diejenige Lösung des der Form $F(x)$ zugeordneten Momentenproblems ist, bei der im Punkte $u=0$ die Masse M konzentriert ist, wo M die gleiche Bedeutung wie in Satz XVI hat.

Nach Satz XVI existiert mithin zu einer definiten Form immer eine Maximalbelegung. Ist das der Form zugeordnete Momentenproblem bestimmt, so ist die Lösung dieses Momentenproblems gleichzeitig Maximalbelegung. Ist die Form außerdem noch uneigentlich definit, so wird

$M = 0$, in diesem Fall ist der Nullpunkt kein Kondensationspunkt der Maximalbelegung.

3. Es bezeichne λ eine beliebige reelle feste Zahl und $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ wie im § 4 die transformierte Potenzreihe

$$\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\bar{c}_v}{z^{v+1}},$$

deren Koeffizienten \bar{c}_v sich aus den c_v mit Hilfe der Formel (60) des § 4 bilden lassen.

Die inverse Substitution ergibt

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z-\lambda}\right); \quad c_v = \sum_{n=0}^v \binom{v}{n} (-\lambda)^n \bar{c}_{v-n}.$$

Ist $d\varphi(u)$ eine beliebige Lösung des der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems, so ist $d\varphi(u-\lambda)$ eine Lösung des der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems, denn es ist wegen (60)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\varphi(u-\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u+\lambda)^v d\varphi(u) = \sum_{n=0}^v \binom{v}{n} \lambda^n \int_{-\infty}^{+\infty} u^{v-n} d\varphi(u) = \bar{c}_v.$$

Ist umgekehrt $d\bar{\varphi}(u)$ eine Belegung, deren Momente v -ter Ordnung

$\int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\bar{\varphi}(u) = \bar{c}_v$ sind, so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\bar{\varphi}(u+\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u-\lambda)^v d\bar{\varphi}(u) = c_v.$$

D. h. aber, man erhält aus den Lösungen des der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems sämtliche Lösungen des der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems, indem man sämtliche zu $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ gehörigen Belegungen $d\varphi(u)$ längs der u -Achse um die Größe λ nach rechts verschiebt. Diese einfache Überlegung führt zu der wichtigen Bemerkung: *ist das der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt (unbestimmt), so ist das der transformierten Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bei beliebigem reellen λ gleichfalls bestimmt (unbestimmt).*

Es werde jetzt vorausgesetzt, daß das der vorgelegten positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem unbestimmt ist und der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $S(z)$ existiert. Dann muß nach

Satz XV die mit $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte Form $F(x)$ eigentlich definit sein, also der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$$

existieren. Andererseits besitzt aber, wie eben bemerkt wurde, auch das der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem für jeden reellen Wert von λ mehr als eine Lösung, die mit $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte Form $\overline{F}(x)$ ist daher gleichfalls eigentlich definit, d. h. es existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mu}_n = \overline{\mu}.$$

Nun ist aber nach den Formeln (63) und (64) des § 4 und den Formeln (45) und (38) des § 2

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_n &= \sum_{r=1}^{n-1} \overline{a}_{2r+1} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\overline{V}_r^2(0)}{\Delta_r} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{V_r^2(\lambda)}{\Delta_r} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{V_r^2(0)}{\Delta_r} \left(\frac{V_r(\lambda)}{V_r(0)} \right)^2 \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} a_{2r+1} Q_{2r}^2(\lambda). \end{aligned}$$

Es ergibt sich also der

Satz XVII. Ist das der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem unbestimmt und existiert der mit $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierende Kettenbruch $S(z)$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} Q_{2n}^2(\lambda)$$

für jeden reellen Wert von λ .

4. Obgleich wir im Laufe unserer Untersuchungen noch wesentlich einfachere und brauchbarere Kriterien für die Bestimmtheit des Momentenproblems ableiten werden, wollen wir doch schon an dieser Stelle ein solches Kriterium formulieren, um die Bedeutung des Satzes XV besser hervortreten zu lassen. Dieses Kriterium wird uns durch eine zweckmäßige Umkehrung des Satzes XVII geliefert.

Satz XVIII. Es sei $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ eine positiv definite Potenzreihe; damit das der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt ist, ist notwendig und hinreichend, daß zu den durch Transformation aus $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ gewonnenen Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z+\lambda}\right)$ Zahlen $\overline{\mu}_n = \overline{\mu}_n(\lambda)$ ge-

hören, die höchstens für endlich viele Werte von λ unterhalb einer gemeinsamen von n unabhängigen festen Schranke M liegen.

Beweis. Daß die angegebene Bedingung für die Bestimmtheit des Momentenproblems hinreichend ist, folgt unmittelbar aus Satz XVII. Um zu zeigen, daß diese Bedingung auch notwendig ist, gehen wir von der entgegengesetzten Annahme aus, es existiere eine feste Zahl M und unendlich viele Punkte $u = \lambda_1, u = \lambda_2, \dots, u = \lambda_r, \dots$ derart, daß die zu $\mathfrak{P}_r\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z + \lambda_r}\right)$ gehörigen Zahlen $\bar{\mu}_n^{(r)} = \bar{\mu}_n(\lambda_r)$ sämtlich $\leq M$ sind.

Da (vgl. Formel (58) des § 3) die Größen $\bar{\mu}_n^{(r)}$ mit wachsendem n nie abnehmen, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}_n^{(r)} = \bar{\mu}^{(r)} = \bar{\mu}(\lambda_r)$$

und es bleibt gleichfalls

$$\bar{\mu}^{(r)} \leq M.$$

Wir bezeichnen vorübergehend mit $\bar{F}^{(r)}(x)$ die mit $\mathfrak{P}_r\left(\frac{1}{z}\right)$ assoziierte quadratische Form und mit \bar{M}_r den Grenzwert der Minima $\bar{M}_r^{(n)}$ der Abschnittsformen $\bar{F}_n^{(r)}(x)$ auf der Ebene $x_0 = 1$ (vgl. § 3). Dann existiert nach Satz XVI eine Belegung $d\bar{\psi}^{(r)}(u)$, bei der im Punkte $u = 0$ die Masse \bar{M}_r konzentriert ist und die eine Lösung des der Form $\bar{F}^{(r)}(x)$ zugeordneten Momentenproblems liefert.

Nach Voraussetzung ist nun aber das der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt. Dann ist, wie oben bemerkt wurde, auch das der transformierten Potenzreihe $\mathfrak{P}_r\left(\frac{1}{z}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z + \lambda_r}\right)$ zugeordnete Momentenproblem für alle λ_r bestimmt und man kann die zu $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ gehörige Belegung $d\psi(u)$ durch passende Verschiebung der zu $\mathfrak{P}_r\left(\frac{1}{z}\right)$ gehörigen Belegungen $d\bar{\psi}^{(r)}(u)$ darstellen. Es wird also

$$d\psi(u) = d\bar{\psi}^{(1)}(u + \lambda_1) = d\bar{\psi}^{(2)}(u + \lambda_2) = \dots = d\bar{\psi}^{(r)}(u + \lambda_r) = \dots$$

Nun hat aber die Belegung $d\psi(u)$ im Kondensationspunkte $u = 0$ die Masse M und die Belegungen $d\bar{\psi}^{(r)}(u + \lambda_r)$ im Kondensationspunkte $u = -\lambda_r$ die Masse \bar{M}_r konzentriert. Dies gilt für alle $r = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$.

Andererseits ist aber nach Formel (57) des § 3

$$\bar{M}_r = \frac{1}{\bar{\mu}^{(r)}} > \frac{1}{M};$$

die Belegung $d\psi(u)$ besäße also unendlich viele Kondensationspunkte, in denen Massen größer als $\frac{1}{M}$ konzentriert sind, und die zugehörige Be-

legungsfunktion $\varphi(u)$ würde folglich in diesen unendlich vielen Kondensationspunkten jedesmal einen Sprung erleiden, der größer als $\frac{1}{M}$ ist. Dann könnte aber $\varphi(u)$ nicht beschränkt sein und $d\varphi(u)$ wäre keine Belegungsfunktion mit den verlangten Eigenschaften.

Unsere Annahme über die Punkte $u = \lambda_r$ führt also zu einem Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 11.

Hilfssätze über Belegungen endlicher Ordnung.

1. Um unsere Darstellung später nicht zu unterbrechen, wollen wir in diesem und im folgenden Paragraphen einige oft zu benutzende Hilfssätze zusammenstellen.

Definition XIII. Wir nennen eine Belegung $d\varphi(u)$ eine Belegung der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ von höherer als n -ter Ordnung, wenn $d\varphi(u)$ entweder eine Belegung endlicher Ordnung größer als n von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ oder eine Lösung des der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ zugeordneten Momentenproblems ist.

Die Tschebyscheffschen Ungleichheitsbeziehungen⁴⁹⁾.

Es sei $d\Phi_n(u)$ eine beliebige Belegung n -ter Ordnung der positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ mit den Kondensationspunkten $u = \lambda_1$, $u = \lambda_2, \dots, u = \lambda_n$ und den in ihnen konzentrierten Massen N_1, N_2, \dots, N_n . Ist $d\varphi(u)$ eine beliebige Belegung der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ von höherer als der Ordnung n , so ist in jedem Kondensationspunkte $u = \lambda_r$ der Belegung $d\Phi_n(u)$

$$(112) \quad \Phi_n(\lambda_r - 0) < \varphi(\lambda_r - 0) \leq \varphi(\lambda_r + 0) < \Phi_n(\lambda_r + 0).$$

⁴⁹⁾ Diese Ungleichheitsbeziehungen wurden zuerst von Tschebyscheff in einer Arbeit „Sur les valeurs limites des intégrales“ [Journ. de Math. pures et appl., (2) 10 (1874), S. 157 u. 160; abgedruckt in den „Œuvres“, II (Petersburg 1907), S. 183–185] ohne Beweis angegeben. Den ersten Beweis veröffentlichte A. Markoff in einer Note „Démonstration de certaines inégalités de M. Tschébycheff“, Math. Ann. 24 (1884), S. 172–180. Unabhängig von diesen Arbeiten, wie u. a. aus seinem Briefwechsel mit Hermite hervorgeht, fand Stieltjes diese Ungleichheitsbeziehungen und veröffentlichte sie wenige Monate später als Markoff in seiner Abhandlung „Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques“, Ann. scient. de l'écol. norm. supér. (3) 1 (1884), S. 407–426; siehe insbes. S. 416–420. Vgl. auch „Correspondance d'Hermite et de Stieltjes“, I (Paris 1905), Brief vom 3. V. 84, S. 101–105. Die Beweise von Stieltjes und Markoff und der hier angegebene stimmen genau überein.

wird entsprechend vermittelt der Konstruktion eines Polynoms $S(x)$ vom Grade $2n-2$ bewiesen, das für $u = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ verschwindet, für $u = \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ den Wert 1 annimmt und dessen Ableitung an den $n-1$ Stellen $u = \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ verschwindet. Dann ist

$$(I') \quad S(x) \geq 0 \quad \text{für } -\infty < x \leq \lambda_r,$$

$$(II') \quad S(x) \geq 1 \quad \text{für } \lambda_r \leq x < +\infty,$$

und es ergibt sich ebenso wie oben

$$\begin{aligned} c_0 - \Phi_n(\lambda_r - 0) &= N_r + N_{r+1} + \dots + N_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) d\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(u) d\varphi(u) \\ &> \int_{\lambda_r-0}^{+\infty} d\varphi(u) = c_0 - \varphi(\lambda_r - 0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $c_0 \geq \Phi_n(u)$, $c_0 \geq \varphi(u)$ die Beziehung (114), w. z. b. w.

2. Aus den Tschebyscheffschen Ungleichheitsbeziehungen folgert man leicht den

Hilfssatz 1. *Es sei $d\varphi(u)$ eine Belegung höherer Ordnung der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ als eine beliebige Belegung n -ter Ordnung $d\Phi_n(u)$ von $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$. Es seien ferner $u=a$ und $u=b$ Wachstumsstellen der Funktion $\varphi(u)$, dagegen das Intervall $a+0 \leq u \leq b-0$ ein Konstanzintervall von $\varphi(u)$. Dann kann die Funktion $\Phi_n(u)$ im Intervall $a+0 \leq u \leq b-0$, die Punkte a und b eingeschlossen, höchstens eine Sprungstelle besitzen⁵⁰⁾.*

Bemerkung. Ist also beispielsweise der Punkt $u=b$ ein Kondensationspunkt der Belegung $d\Phi_n(u)$, so kann die Funktion $\Phi_n(u)$ weder im Innern des Intervalls $a \dots b$, noch im Endpunkte $u=a$ eine weitere Unstetigkeit besitzen. Ist andererseits der Punkt $u=a$ ein Kondensationspunkt, so besitzt die Funktion $\Phi_n(u)$ im Intervall $a \dots b$, den Endpunkt $u=b$ eingeschlossen, gleichfalls keine weiteren Wachstumstellen mehr.

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei Unstetigkeitsstellen $u = \lambda_e$ und $u = \lambda_{e+1}$ von $\Phi_n(u)$, die im Innern oder in den Endpunkten des Intervalls $a \leq u \leq b$ gelegen sind, so müßte, da doch im Intervall

$$\lambda_e + 0 \leq u \leq \lambda_{e+1} - 0,$$

die Funktionen $\varphi(u)$ und $\Phi_n(u)$ beide konstant bleiben, die Funktionsdifferenz $\varphi(u) - \Phi_n(u)$ dort beständig > 0 oder beständig $= 0$ oder beständig < 0 sein.

⁵⁰⁾ Vgl. das etwas weniger scharfe Resultat bei Stieltjes 8, S. 79–81 und S. 94.

Im Falle $\varphi(u) - \Phi_n(u) > 0$ wäre

$$(115) \quad \varphi(\lambda_e + 0) > \Phi_n(\lambda_e + 0).$$

Im Falle $\varphi(u) - \Phi_n(u) < 0$ wäre

$$(116) \quad \varphi(\lambda_{e+1} - 0) < \Phi_n(\lambda_{e+1} - 0).$$

Im Falle $\varphi(u) - \Phi_n(u) = 0$ wäre

$$(117) \quad \varphi(\lambda_e + 0) = \Phi_n(\lambda_e + 0) = \Phi_n(\lambda_{e+1} - 0) = \varphi(\lambda_{e+1} - 0).$$

Alle drei Beziehungen (115), (116) und (117) widersprechen aber den Tschebyschefschen Ungleichheitsbeziehungen (112) und damit ist die Behauptung des Hilfssatzes 1 bewiesen.

3. Hilfssatz 2. Es sei eine unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung $d\Phi^{(\nu)}(u)$ der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ vorgelegt, die im Sinne der Definition X gegen eine Belegung $d\varphi(u)$ konvergieren möge. Es sei ferner der Punkt $u = \lambda$ eine Wachstumsstelle von $\varphi(u)$. Ist δ eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl, so existiert eine Zahl $N = N(\delta, \lambda)$, die nur von δ und λ abhängt, von der Beschaffenheit, daß alle Belegungen $d\Phi^{(\nu)}(u)$, deren Index $\nu \geq N(\delta)$ ist, einen im Intervall $\lambda - \delta \leq u \leq \lambda + \delta$ gelegenen Kondensationspunkt besitzen.

Beweis. Da die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\varphi(u)$ als einer monotonen Funktion im Intervall $\lambda - \delta \leq u \leq \lambda + \delta$ abzählbar ist, so existieren mindestens zwei Stetigkeitsstellen $u = \lambda'$ und $u = \lambda''$ von $\varphi(u)$, wobei

$$\lambda - \delta < \lambda' < \lambda, \quad \lambda < \lambda'' < \lambda + \delta$$

ist.

Setzt man $w = \varphi(\lambda'') - \varphi(\lambda')$, so ist nach Voraussetzung $w > 0$.

Nach der Definition X folgt ferner aus der Voraussetzung, daß die Folge der Belegungsfunktionen $\Phi^{(\nu)}(u)$ mit wachsendem ν in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(u)$, also mindestens in den Punkten $u = \lambda'$ und $u = \lambda''$ gegen die Funktion $\varphi(u)$ konvergiert. Es existiert demnach eine ganze Zahl $N = N(\delta, \lambda)$, die nur von w und damit nur von δ und λ abhängt, derart, daß für $\nu \geq N$

$$|\Phi^{(\nu)}(\lambda') - \varphi(\lambda')| \leq \frac{w}{8}, \quad |\Phi^{(\nu)}(\lambda'') - \varphi(\lambda'')| \leq \frac{w}{8}$$

ist. Mithin ergibt sich für $\nu \geq N$

$$\begin{aligned} \Phi^{(\nu)}(\lambda'') - \Phi^{(\nu)}(\lambda') &\geq \varphi(\lambda'') - \varphi(\lambda') - |\Phi^{(\nu)}(\lambda'') - \varphi(\lambda'')| - |\Phi^{(\nu)}(\lambda') - \varphi(\lambda')| \\ &\geq w - \frac{w}{8} - \frac{w}{8} = \frac{w}{8}, \end{aligned}$$

d. h. aber: die Funktionen $\Phi^{(\nu)}(u)$ haben für $\nu \geq N = N(\delta, \lambda)$ im Innern des Intervalls $\lambda' \leq u \leq \lambda''$ eine Wachstumsstelle, also erst recht im Innern

des Intervalls $\lambda - \delta \leq u \leq \lambda + \delta$, in dem das Intervall $\lambda' \leq u \leq \lambda''$ enthalten ist. Da außerdem die Belegung $d\Phi^{(v)}(u)$ von endlicher Ordnung ist, so muß diese Wachstumsstelle ein Kondensationspunkt von $d\Phi^{(v)}(u)$ sein, w. z. b. w.

§ 12.

Ein funktionentheoretischer Hilfssatz.

1. Hilfssatz 3. *Es sei eine unendliche Folge reeller von Null verschiedener Zahlen vorgelegt*

$$\dots < \lambda_{-v} < \dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_v < \dots,$$

derart, daß

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_v^2}$$

konvergiert, und mithin das unendliche Produkt

$$g(z) = \prod_{v=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_v}\right) e^{-\frac{z}{\lambda_v}}$$

eine ganze transzendente Funktion darstellt. (Hierbei bedeutet ein für allemal der Strich hinter den Zeichen Σ und Π , daß der Index $v=0$ auszulassen ist.)

Es sei ferner

$$Q_{m_1}(z), Q_{m_2}(z), \dots, Q_{m_h}(z), \dots, (m_h \rightarrow \infty)$$

eine unendliche Folge von Polynomen m_h -ten Grades, mit nur reellen Nullstellen; für $z=0$ mögen die Polynome sämtlich den Wert 1 annehmen. Die Nullstellen des Polynoms $Q_{m_h}(-z)$ bezeichnen wir mit $\lambda_v^{(m_h)}$. Man denke sich die Zahlen $\lambda_v^{(m_h)}$ — ebenso wie die Zahlen λ_v — der Größe nach geordnet und versehe diejenigen $\lambda_v^{(m_h)}$, die kleiner als Null sind, mit einem negativen, die übrigen $\lambda_v^{(m_h)}$ mit einem positiven Index.

Über die Nullstellen $u = \lambda_v^{(m_h)}$ machen wir die beiden Voraussetzungen:

Erstens. Es sei für jedes feste v

$$(118) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_v^{(m_h)} = \lambda_v.$$

Zweitens. Für alle m_h

$$(119) \quad \begin{cases} \lambda_v^{(m_h)} > \lambda_{v-1} & \text{für } v \geq 2, \\ \lambda_v^{(m_h)} < \lambda_{v+1} & \text{für } v \leq -2. \end{cases} \quad s_1)$$

^{s1)} Man beachte, daß die Relation (118) nicht gleichmäßig für alle v vorausgesetzt ist.

Setzt man

$$\vartheta_{m_h} = \sum_v \frac{1}{\lambda_v^{(m_h)}},$$

wo die Summe rechter Hand über sämtliche Nullstellen des Polynoms $Q_{m_h}(-z)$ zu erstrecken ist, so konvergieren die Funktionen $e^{-\vartheta_{m_h} z} Q_{m_h}(z)$ mit wachsendem h in jedem endlichen Bereich der z -Ebene gleichmäßig gegen die ganze transzendente Funktion $g(z)$.

Beweis ⁵²⁾. Ist Z eine beliebig große vorgegebene Zahl > 1 , so wähle man zwei feste Indizes $\varrho > 0$, $\sigma < 0$ derart, daß

$$(120) \quad \frac{Z}{\lambda_\varrho} < 1, \quad \frac{Z}{|\lambda_\sigma|} < 1$$

ist und zerlege die Funktionen $g(z)$ und $e^{-\vartheta_{m_h} z} Q_{m_h}(z)$ für $m_h \geq \varrho + |\sigma|$ in zwei Faktoren, indem man setzt:

$$(121) \quad \begin{cases} \Pi_1(z) = \prod_{v=\sigma}^{\varrho} \left(1 + \frac{z}{\lambda_v}\right) e^{-\frac{z}{\lambda_v}}, & \Pi_1^{(m_h)}(z) = \prod_{v=\sigma}^{\varrho} \left(1 + \frac{z}{\lambda_v^{(m_h)}}\right) e^{-\frac{z}{\lambda_v^{(m_h)}}}, \\ \Pi_2(z) = \prod_{\substack{\lambda_v \leq \lambda_{\varrho+1} \\ \lambda_v \geq \lambda_{\sigma+1}}} \left(1 + \frac{z}{\lambda_v}\right) e^{-\frac{z}{\lambda_v}}, & \Pi_2^{(m_h)}(z) = \prod_{\substack{\lambda_v^{(m_h)} \leq \lambda_{\varrho+1}^{(m_h)} \\ \lambda_v^{(m_h)} \geq \lambda_{\sigma+1}^{(m_h)}}} \left(1 + \frac{z}{\lambda_v^{(m_h)}}\right) e^{-\frac{z}{\lambda_v^{(m_h)}}}; \end{cases}$$

hierbei folgt die Konvergenz des unendlichen Produktes $\Pi_2(z)$ aus der Voraussetzung, daß $\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_v^2}$ konvergiert, nach dem Weierstraßschen Fundamentalsatz über die Produktzerlegung ganzer transzendenter Funktionen.

Offenbar ergibt sich aus (121)

$$(122) \quad g(z) = \Pi_1(z) \Pi_2(z), \quad e^{-\vartheta_{m_h} z} Q_{m_h}(z) = \Pi_1^{(m_h)}(z) \Pi_2^{(m_h)}(z).$$

Daß der Grenzwert

$$(123) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \Pi_1^{(m_h)}(z) = \Pi_1(z)$$

gleichmäßig für $|z| \leq Z$ existiert, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung (118); es bleibt mithin nur noch übrig, die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $\Pi_2^{(m_h)}(z)$ nachzuweisen.

⁵²⁾ Diesen Beweis, der meinen ursprünglichen, längeren ersetzt, verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn v. Pidoll aus München bei der ersten Korrektur.

Man bilde zunächst mit Rücksicht darauf, daß nach Voraussetzung

$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}^2}$ konvergiert, die Koeffizienten

$$\Lambda_n^{(m_h)} = \sum_{\substack{\lambda_{\nu}^{(m_h)} \leq \lambda_{\sigma+1}^{(m_h)} \\ \lambda_{\nu}^{(m_h)} \geq \lambda_{\varrho+1}^{(m_h)}}} \frac{1}{(\lambda_{\nu}^{(m_h)})^n}, \quad \Lambda_n = \sum_{\nu=\sigma+1}^{-\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}^n} + \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}^n} \quad (n \geq 2),$$

$$\tilde{\Lambda}_n = \sum_{\nu=\sigma}^{-\infty} \frac{1}{|\lambda_{\nu}|^n} + \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}^n} \quad (n \geq 2)$$

und bemerke, daß *erstens* wegen (119)

$$(124) \quad |\Lambda_n^{(m_h)}| \leq \tilde{\Lambda}_n \quad (\text{für alle } m_h \geq \varrho + |\sigma|), \quad |\Lambda_n| \leq \tilde{\Lambda}_n,$$

zweitens wegen (118) und (119)

$$(125) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda_n^{(m_h)} = \Lambda_n,$$

und *drittens*, daß die Reihe

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tilde{\Lambda}_n}{n} Z^n$$

konvergiert, denn wenn mit λ' die kleinere der beiden Zahlen λ_{ϱ} und $|\lambda_{\sigma}|$ bezeichnet wird, so ist $\tilde{\Lambda}_n \leq \frac{1}{(\lambda')^{n-2}} \tilde{\Lambda}_2$, mithin

$$\tilde{\Lambda} \leq Z^2 \tilde{\Lambda}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{Z}{\lambda'} \right)^n,$$

und diese Reihe ist wegen (120) konvergent.

Aus (124) folgt unmittelbar, daß auch die Potenzreihen

$$\Lambda^{(m_h)}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \Lambda_n^{(m_h)} \frac{z^n}{n}, \quad \Lambda(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \Lambda_n \frac{z^n}{n}$$

für $|z| \leq Z$ konvergieren und daß in dem selben Bereich die Reihe $\tilde{\Lambda}$ eine Majorante sämtlicher Reihen $\Lambda^{(m_h)}(z)$ und $\Lambda(z)$ ist.

Es ergibt sich mithin in Verbindung mit (125), daß die Beziehung

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Lambda^{(m_h)}(z) = \Lambda(z)$$

gleichmäßig für $|z| \leq Z$ besteht.

Andrerseits ist aber mit Rücksicht auf (121)

$$\Pi_2(z) = e^{A(z)}, \quad \Pi_2^{(m_h)}(z) = e^{A^{(m_h)}(z)},$$

mithin gilt auch gleichmäßig für $|z| \leq Z$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi_9^{(\infty)\lambda}(z) = \Pi_9(z),$$

und diese Beziehung ergibt zusammen mit (123) wegen (122) den Beweis der Behauptung des Hilfssatzes.

§ 13.

Die Folge der Näherungsbrüche $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$.

1. Satz XIX. Die mit einer positiv definiten Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ korrespondierende Folge von Näherungsbrüchen⁵³⁾ $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ ist immer konvergent, und zwar ist in jedem Gebiete der z -Ebene vom Typus Ω gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

wo $d\psi(u)$ wieder die Maximalbelegung von $F(x)$ bezeichnet.

Ist das der Form $F(x)$ zugeordnete Momentenproblem unbestimmt, so existieren außerdem zwei ganze transzendente Funktionen $r^*(z)$ und $s^*(z)$ und eine unendliche Folge von reellen Zahlen ζ_1, ζ_2, \dots , die alle unterhalb einer gemeinsamen festen Schranke Z bleiben, von der Be-schaffenheit, daß in jedem endlichen Teilbereiche der z -Ebene gleich-mäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z) = r^*(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\zeta_n z} Q_{2n-1}(z) = s^*(z)$$

wird⁵⁴⁾.

Beweis. Der erste Teil dieses Satzes folgt leicht aus den Sätzen XV und XVI des § 10:

Ist die Form $F(x)$ uneigentlich definit, so konvergiert nach Satz XV

⁵³⁾ Wenn sich auch eine positiv definite Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ nicht immer in einen korrespondierenden Kettenbruch $\mathcal{S}(z)$ entwickeln läßt, so existiert wenigstens in jedem Falle die Folge der durch die Formeln (27) des § 2 definierten Näherungsbrüche $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$, die im folgenden die mit der Potenzreihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ (bzw. mit der Form $F(z)$) korrespondierende Folge der Näherungsbrüche ungerader Ordnung genannt wird.

⁵⁴⁾ In § 16 Teil II wird als Ergänzung zu diesem Satze bewiesen werden, daß die Folge der Zahlen ζ_n nicht nur beschränkt, sondern sogar konvergent ist, daß also auch die Folge der Polynome $P_{2n-1}(z)$ (bzw. $Q_{2n-1}(z)$) selbst gegen eine ganze transzendente Funktion $r(z)$ (bzw. $s(z)$) konvergiert.

der mit $F(x)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ vollständig, mithin konvergieren auch die verallgemeinerten Näherungsbrüche

$$K_n(z; -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}) = \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$$

gleichmäßig in jedem Gebiete der z -Ebene vom Typus Ω . Wir können uns daher beim Beweise auf die mit eigentlich definiten Formen $F(x)$ korrespondierenden Folgen von Näherungsbrüchen $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ beschränken.

Im § 6 wurde gezeigt, daß sich die Quotienten $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ als Stieltjesche Integrale darstellen lassen (vgl. Formel (86)), und zwar wurde gesetzt

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_n(u)}{z+u}.$$

Die Belegungen $d\Psi_n(u)$ sind dadurch charakterisiert, daß sie den Punkt $u=0$ zum Kondensationspunkt haben, in dem die Masse $M^{(n)}$ konzentriert ist. Hierbei bedeutet $M^{(n)}$ wie üblich das Minimum der Abschnittsform $F_n(x)$ auf der n -dimensionalen Ebene $x_0=1$.

Die $M^{(n)}$ bilden aber eine Folge von Zahlen, die, da $F(x)$ eigentlich definit vorausgesetzt ist, sich einem Grenzwert $M > 0$ nähern; und zwar ist nach Formel (59) des § 3

$$M^{(n)} > M.$$

Es läßt sich daher eine neue Belegung endlicher Ordnung $d\Psi_n^*(u)$ bilden, die aus der ursprünglichen Belegung $d\Psi_n(u)$ durch Entfernung der Masse M im Kondensationspunkte $u=0$ gewonnen wird. Auch für diese neuen Belegungen $d\Psi_n^*(u)$ ist der Punkt $u=0$ ein Kondensationspunkt, in dem die Masse $M^{(n)} - M > 0$ konzentriert ist.

Es ist ferner offenbar

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Psi_n^*(u) = c_0 - M \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u^v d\Psi_n^*(u) = c_v, \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, 2n-2, \end{array} \right.$$

außer im Falle $V_{n-1}(0) = 0$, wo (126) nur für $v = 1, 2, \dots, 2n-3$ gilt.

Da auch die Belegung $d\Psi_n^*(u)$ ebenso wie die ursprüngliche Belegung $d\Psi_n(u)$ im ganzen n (bzw. im Falle $V_{n-1}(0) = 0$ nur $n-1$) Kondensationspunkte hat, so folgt in Verbindung mit (126), daß $d\Psi_n^*(u)$ eine Belegung n -ter (bzw. $n-1$ -ter) Ordnung der quadratischen Form $F(x) - Mx_0^2$ ist. Diese Form ist aber nach Satz VI des § 3 uneigentlich definit, das ihr zugeordnete Momentenproblem mithin nach Satz XV des § 10

bestimmt. Dann konvergiert aber nach Satz XIV des § 9 jede unendliche Folge von Belegungen endlicher Ordnung der Form $F(x) - Mx_0^2$, wofür nur ihre Ordnung über alle Grenzen wächst, im Sinne der Definition X des § 6 gegen ein und dieselbe Belegung $d\psi^*(u)$, die die einzige Lösung des der Form $F(x) - Mx_0^2$ zugeordneten Momentenproblems ist. Dies gilt gewiß für die Folge der Belegungen $d\Psi_n^*(u)$. Es besteht ferner nach Satz XII' des § 7 gleichmäßig in jedem Gebiet der z -Ebene vom Typus Ω die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_n^*(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi^*(u)}{z+u}.$$

Daraus folgt aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_n(u)}{z+u} = \frac{M}{z} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_n^*(u)}{z+u} = \frac{M}{z} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi^*(u)}{z+u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

oder mit anderen Worten nach Satz XII''

$$(127) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d\Psi_n(u) = d\psi(u),$$

wenn $d\psi(u)$ diejenige Belegung bedeutet, die aus $d\psi^*(u)$ gebildet wird, indem man zu dieser Belegung im Nullpunkte die Masse M hinzufügt.

Der Punkt $u=0$ ist nach dem Zusatz zu Satz XVI des § 10 kein Kondensationspunkt der Belegung $d\psi^*(u)$, weil $d\psi^*(u)$ zu einer uneigentlich definiten Form gehört; dagegen ist der Nullpunkt ein Kondensationspunkt der Belegung $d\psi(u)$, in dem die Masse M konzentriert ist.

Da $d\psi^*(u)$ eine Lösung des der Form $F(x) - Mx_0^2$ zugeordneten Momentenproblems ist, so ist offenbar für alle ν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\psi(u) = c_\nu,$$

$d\psi(u)$ ist also in der Tat die Maximalbelegung von $F(x)$ (vgl. Definition XII). Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

2. Der zweite Teil unseres Satzes bezieht sich nur auf solche korrespondierenden Folgen von Näherungsbrüchen ungerader Ordnung, die zu quadratischen Formen mit unbestimmten Momentenproblemen gehören. Es werde zunächst aus dieser Voraussetzung gefolgert, daß in jedem Bereich der z -Ebene vom Typus Ω höchstens endlich viele Punkte $z = z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ ($y_\nu \neq 0$) existieren, in denen die Polynome $Q_{2n-1}(z_\nu)$ für gewisse hinreichend große n solche Werte annehmen, die dem absoluten Betrage nach größer als jede noch so große endliche positive Zahl sind.

Zu jedem derartigen Punkte $z = z_\nu$ und zu jedem vorgegebenen, be-

liebig kleinem positiven ε läßt sich nämlich eine unendliche Folge von Indizes $n_1 < n_2 < \dots < n_h < \dots$, die von der Größe z_e und von ε abhängt, derart angeben, daß für alle Indizes n_h der Folge

$$\left| \frac{1}{Q_{2n_h-1}(z_e)} \right| \leq \varepsilon$$

wird.

Ist jetzt $d\varphi(u)$ eine beliebige Lösung des vorgelegten unbestimmten Momentenproblems und ist ferner $m \geq n_h$, so ist nach Formel (104) in Verbindung mit Formel (109) des § 10

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z_e + u} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{z_e + u} \right| \leq \frac{2\mu_{n_h}}{|y_e| \left| \frac{Q_{2n_h-1}(z_e)}{z_e^2} \right|} \leq \frac{2\mu_{n_h}}{|y_e|},$$

wo $d\Phi_m(u)$ eine beliebige Belegung m -ter Ordnung der vorgelegten quadratischen Form $F(x)$ bedeutet. μ bezeichnet den Grenzwert

$\lim_{h \rightarrow \infty} \mu_{n_h} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r+1}$; dieser existiert nach Satz VI § 3, da die Form $F(x)$ wegen Satz XV des § 10 eigentlich definit ist.

Da man ε beliebig klein annehmen kann, wofern nur n_h und damit m groß genug gewählt wird, so folgt

$$(128) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{z_e + u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z_e + u}.$$

Nach Voraussetzung ist aber das vorgelegte Momentenproblem unbestimmt. Sind also $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ zwei seiner voneinander verschiedenen Lösungen, so werden nach der Anm. ²⁰⁾ auf S. 258 auch die beiden analytischen Funktionen

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z + u} \quad \text{und} \quad f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z + u}$$

voneinander verschieden sein.

Andererseits folgt aber, da die Beziehung (128) für jede beliebige Lösung $d\varphi(u)$ des Momentenproblems gilt,

$$f(z_e) = f_1(z_e) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi_m(u)}{z_e + u}$$

für alle Punkte $z = z_e$, in denen die Polynome $Q_{2n-1}(z_e)$ dem absoluten Betrage nach über alle Schranken wachsen. Es kann daher in einem

Bereich vom Typus Ω , in dem die Funktionen $f(z)$ und $f_1(z)$ beide regulär sind, höchstens endlich viele solcher Punkte $z = z_e$ geben, da zwei voneinander verschiedene analytische Funktionen in einem ganz im Endlichen gelegenen abgeschlossenen Bereich, in dem sie beide regulär sind, höchstens in endlich vielen Punkten einander gleich sein können.

Damit ist um so mehr bewiesen, daß unter unendlich vielen Punkten der z -Ebene, die wenigstens einen im Endlichen gelegenen nicht reellen Häufungspunkt besitzen, mindestens ein Punkt $z = z'$ existiert, in dem alle Polynome

$$(129) \quad |Q_{2n-1}(z')| \leq M$$

bleiben, unter M eine feste positive Zahl verstanden, die nur von z' aber nicht von n abhängt.

3. Dies vorausgeschickt, soll gezeigt werden, daß die zur Maximalbelegung gehörige Funktion $\psi(u)$ in jedem endlichen Intervall nur endlich viele Wachstumsstellen haben kann, die dann offenbar als isolierte Wachstumsstellen Kondensationspunkte der Maximalbelegung $d\psi(u)$ sind.

Wir gehen von der gegenteiligen Annahme aus, daß ein ganz im Endlichen gelegenes Intervall $-b \leq u \leq b$ existiert, welches unendlich viele Wachstumsstellen von $\psi(u)$ enthält. Bedeutet p eine beliebig große ganze positive Zahl und bezeichnen wir mit $\omega_{r_1}, \omega_{r_2}, \dots, \omega_{r_p}$ p der unendlich vielen Wachstumsstellen von $\psi(u)$ im Intervall $-b \dots + b$, so läßt sich wegen (127) nach Hilfssatz 2 des § 11 zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen Zahl δ eine nur von δ und den im Intervall $-b \dots + b$ betrachteten p Wachstumsstellen abhängige Zahl $N = N(p; \delta)$ derart bestimmen, daß die Polynome $Q_{2n-1}(u)$, wenn $n \geq N$ ist, im Intervall $\omega_{r_e} - \delta \leq u \leq \omega_{r_e} + \delta$ (für $e = 1, 2, \dots, p$) mindestens eine Nullstelle $\omega_{r_e}^{(n)}$ besitzen. Nun ist aber für $z = iy$ nach Formel (110) des § 10

$$Q_{2n-1}(z) = \mu_n iy \prod_{r=1}^{n-1} \left(1 + \frac{iy}{\omega_r^{(n)}}\right).$$

Es ist ferner für die p Nullstellen $\omega_{r_e}^{(n)}$, die im Intervall $-b \leq u \leq +b$ gelegen sind,

$$\left|1 + \frac{iy}{\omega_{r_e}^{(n)}}\right| \geq \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{b^2}},$$

wenn $y \geq \eta$ gewählt wird, und für die übrigen $n - p - 1$ Nullstellen $\omega_r^{(n)}$

$$\left|1 + \frac{iy}{\omega_r^{(n)}}\right| \geq 1.$$

Mithin ergibt sich schließlich wegen $\mu_n \geq a_1$

$$(130) \quad |Q_{2n-1}(iy)| \geq a_1 \eta \left(1 + \frac{\eta^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

für $n \geq N$ und $y \geq \eta$.

Da diese Beziehung unter der Annahme, daß unendlich viele Wachstumsstellen von $\psi(u)$ im Intervall $-b \leq u \leq +b$ gelegen sind, sich für jedes noch so große p beweisen läßt, wofern $N = N(p; \delta)$ nur groß genug gewählt wird, so folgt aus (130), daß für $y \geq \eta$ das Polynom $Q_{2n-1}(iy)$ für $n \geq N$ oberhalb einer festen Schranke bleibt, die mit p über alle Grenzen wächst. Diese aus unserer Annahme gezogene Folgerung steht aber im Widerspruch mit der im Abschnitt 2 dieses Paragraphen vorausgeschickten Bemerkung, nach der unter den unendlich vielen Punkten iy mindestens ein Punkt $z' = iy'$ ($y' > \eta$) existiert, in dem alle Polynome $Q_{2n-1}(iy)$ dem absoluten Betrage nach unter einer gemeinsamen festen Schranke M bleiben. Damit ist bewiesen, daß die Funktion $\psi(u)$ in jedem endlichen Intervall nur endlich viele Wachstumsstellen haben kann.

Wir bezeichnen diese Kondensationspunkte der Belegung $d\psi(u)$ mit $u = \omega_r$ ($-\infty < r < \infty$) und mit M_r die in ihnen konzentrierten Massen. Wir denken uns ferner die Zahlen ω_r der Größe nach geordnet, so daß

$$-\infty \dots < \omega_r < \omega_{r-1} < \dots < \omega_{-1} < \omega_0 = 0 < \omega_1 < \dots < +\infty$$

wird. Schreiben wir das Stieltjesche Integral in Summenform, so ergibt sich

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(u)}{z+u} = \frac{M}{z} + \sum'_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{M_r}{z+\omega_r}.$$

Hierbei bedeutet der Strich, daß das Glied mit dem Index $r=0$ bei der Ausführung der Summation fortzulassen ist.

4. Nunmehr soll nachgewiesen werden, daß die unendliche Reihe

$$\sum'_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_r^n} \text{ konvergiert.}$$

Es seien $u = \omega_{(-n)}^{(n)}$ die Wurzeln der Gleichung $Q_{2n-1}(-u) = 0$ der Größe nach geordnet, es sei also

$$\omega_{(-n)}^{(n)} < \dots < \omega_{-1}^{(n)} < \omega_0^{(n)} = 0 < \omega_1^{(n)} < \dots < \omega_{(+n)}^{(n)},$$

wobei $\overset{(+)}{n}$ bzw. $\overset{(-)}{n}$ die Anzahl der positiven bzw. negativen von Null verschiedenen Wurzeln bedeutet, so daß $\overset{(+)}{n} + \overset{(-)}{n} = n-1$ ist (außer im Falle $V_{n-1}(0) = 0$, wo $\overset{(+)}{n} + \overset{(-)}{n} = n-2$ wird).

Ist jetzt ein Intervall $-b \leq u \leq b$ und eine beliebig kleine positive Zahl δ vorgelegt, so existiert nach dem Hilfssatz 2 des § 11 eine Zahl $N = N(b; \delta)$ derart, daß sich für alle $n \geq N$ eine Zahl $\omega_{\varrho}^{(n)}$ finden läßt, die der Beziehung

$$(131) \quad |\omega_{\varrho}^{(n)} - \omega_r| \leq \delta$$

genügt.

Es seien $\varrho^{(+)}$ und $\varrho^{(-)}$ zwei passend gewählte Indizes, so daß $\omega_{\varrho-1}^{(-)} \leq -b + 2\delta \leq \omega_{\varrho}^{(-)}$, $\omega_{\varrho}^{(+)} \leq b - 2\delta \leq \omega_{\varrho+1}^{(+)}$ wird; außerdem werde von vornherein δ so klein angenommen, daß $\omega_{r-1} + \delta < \omega_r - \delta$ für $\varrho \leq r \leq \varrho^{(+)} + 1$ ist. Um die Lage sämtlicher Nullstellen $u = \omega_r^{(n)}$ zu bestimmen, wende man im Hinblick auf (131) und den Umstand, daß alle Gleichungen $Q_{2n-1}(-z) = 0$ die Wurzel $z = \omega_0^{(n)} = 0$ gemeinsam haben, den Hilfssatz 1 des § 11 an (man beachte insbesondere die dort beigefügte Bemerkung). Dann ergibt sich zunächst $\omega_{\varrho}^{(n)} = \omega_r^{(n)}$, und ferner folgt für $n \geq N$

$$(132) \quad \begin{cases} \omega_r^{(n)} < \omega_r \text{ für } r \leq \varrho^{(-)} - 1, & \omega_r < \omega_r^{(n)} \text{ für } \varrho^{(+)} + 1 \leq r, \\ \omega_{r-1} < \omega_r^{(n)} < \omega_r \text{ für } \varrho^{(-)} \leq r \leq -1, & \omega_r < \omega_r^{(n)} < \omega_{r+1} \text{ für } 1 \leq r \leq \varrho^{(+)} \end{cases}$$

Da ferner für alle n und r

$$\left| 1 + \frac{iy}{\omega_r^{(n)}} \right| \geq 1$$

ist, so folgt in Verbindung mit (132)

$$(133) \quad \left| \frac{Q_{2n-1}^{(iy)}}{(iy)^2} \right| \geq \mu_n \prod_{r=\varrho^{(-)}}^{\varrho^{(+)}} \left(1 + \frac{y^2}{\omega_r^2} \right) \geq a_1 \left(1 + y^2 \sum_{r=\varrho^{(-)}}^{\varrho^{(+)}} \frac{1}{\omega_r^2} \right).$$

Wenn die Reihe $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_r^2}$ divergent wäre, so könnte man aus (133) schließen, daß die Polynome $Q_{2n-1}(iy)$ mit zunehmendem n für $y \geq \eta$ dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen wachsen würden; man hat nur b groß genug zu wählen, damit $1 + y^2 \sum_{r=\varrho^{(-)}}^{\varrho^{(+)}} \frac{1}{\omega_r^2} \geq M$ wird, und dann

$N = N(b; \delta)$ so zu bestimmen, daß die Beziehung (131) für alle $n \geq N$ und alle $|\omega_r| \leq b - 2\delta$, mithin auch (133) für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Diese aus unserer Annahme gezogene Folgerung widerspricht aber unserer oben in Abschnitt 2 Formel (129) formulierten Bemerkung.

Damit ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_\nu^2}$ bewiesen. Aus ihr folgt aber nach dem Weierstraßschen Satze über die Produktzerlegung ganzer transzendenter Funktionen, daß das unendliche Produkt

$$\mu \cdot z \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\omega_\nu}\right) e^{-\frac{z}{\omega_\nu}}$$

in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich gleichmäßig gegen eine ganze transzendente Funktion $s^*(z)$ konvergiert.

5. Man setze

$$\zeta_n = \sum_{\nu} \frac{1}{\omega_\nu^{(n)}},$$

wo die Summe rechter Hand über alle von 0 verschiedenen Wurzeln $\omega_\nu^{(n)}$ der Gleichung $Q_{2n-1}(-z) = 0$ zu erstrecken ist.

Nummehr läßt sich auf die Folge der Funktionen

$$e^{-\zeta_n z} Q_{2n-1}(z)$$

der Hilfssatz 3 des § 12 anwenden, da die $\omega_\nu^{(n)}$ und ω_ν den beiden Voraussetzungen (118) und (119) genügen, wie sich aus den Beziehungen (131) und (132) unmittelbar ergibt. Damit ist bewiesen, daß gleichmäßig in jedem endlichen Bereich der z -Ebene die Beziehung besteht:

$$(134) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\zeta_n z} Q_{2n-1}(z) = s^*(z).$$

6. Es soll ferner gezeigt werden, daß die Größen ζ_n unter einer gemeinsamen festen Schranke Z liegen. Dies geschieht in folgender Weise.

Nach der in Abschnitt 2, Formel (129) formulierten Bemerkung müssen in zwei festen Punkten

$$z' = x' + iy', \quad z'' = -x'' + iy'' \quad (x' > 0, x'' > 0; y' > 0, y'' > 0)$$

sämtliche Polynome $Q_{2n-1}(z)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als eine passend gewählte Zahl M bleiben.

Andererseits ist $s^*(z')$ und $s^*(z'')$ von Null verschieden, da $s^*(z)$ keine komplexen Nullstellen besitzt. Ist jetzt δ eine feste positive Zahl kleiner als $|s^*(z')|$ und $|s^*(z'')|$, so läßt sich wegen (134) eine Zahl $N = N(\delta)$ finden, derart, daß für $n \geq N$

$$|e^{-\zeta_n z'} Q_{2n-1}(z')| \geq |s^*(z')| - \delta, \quad |e^{-\zeta_n z''} Q_{2n-1}(z'')| \geq |s^*(z'')| - \delta$$

wird. Daraus folgt aber für $n \geq N$

$$\left| \frac{Q_{2n-1}(z')}{e^{-\zeta_n z'} Q_{2n-1}(z')} \right| \leq \frac{M}{|s^*(z')| - \delta},$$

mithin

$$|e^{\zeta_n z}| = e^{\zeta_n z'} \leq \frac{M}{|s^*(z')| - \delta},$$

und entsprechend für $z = z''$

$$|e^{\zeta_n z''}| = e^{-\zeta_n z''} \leq \frac{M}{|s^*(z'')| - \delta}.$$

Aus diesen beiden Abschätzungen folgt aber, daß die Größen ζ_n zwischen zwei festen Schranken gelegen sind, daß also bei passender Wahl von Z die Beziehung $-Z \leq \zeta_n \leq Z$ oder einfach $|\zeta_n| \leq Z$ gilt.

7. Als letzte Behauptung des Satzes XIX ist noch zu beweisen, daß auch die Funktionen

$$e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z)$$

gleichmäßig in jedem ganz im endlichen gelegenen Bereiche der z -Ebene gegen eine ganze transzendente Funktion $r^*(z)$ konvergieren. Man setze

$$r^*(z) = s^*(z) \left[\frac{M}{z} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu}{z + \omega_\nu} \right].$$

Dann ist offenbar $r^*(z)$ eine ganze Funktion, denn der Ausdruck in der Klammer rechter Hand hat nur die Stellen $z = 0$ und $z = -\omega_\nu$ zu Polen, die Nullstellen des andern Faktors $s^*(z)$ sind. Man kann auch leicht erkennen, daß $r^*(z)$ nur reelle Nullstellen hat, da die beiden Faktoren rechter Hand keine komplexen Nullstellen haben, doch gehen wir auf diesen Umstand nicht näher ein, da er für uns von untergeordnetem Interesse ist.

Wir gehen nunmehr von der einfachen Identität

$$(135) \quad e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z) = e^{-\zeta_n z} Q_{2n-1}(z) \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$$

aus. Da nach dem ersten Teile unseres Beweises in jedem Gebiete der z -Ebene vom Typus Ω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M}{z} + \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{M_\nu}{z + \omega_\nu}$$

ist, so folgt in Verbindung mit (134) gleichmäßig in jedem Gebiet vom Typus Ω die Beziehung

$$(136) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z) = r^*(z).$$

Um nun zu zeigen, daß der Ausdruck linker Hand von (136) in jedem beliebigen, ganz im endlichen gelegenen Bereich der z -Ebene, z. B. für $|z| \leq Z$ gleichmäßig konvergiert, benutzen wir einen bekannten, allgemeinen funktionentheoretischen Satz von Stieltjes⁸⁴⁾.

⁸⁴⁾ Stieltjes 8, S. 50–61. Vgl. auch „Correspondance d'Hermite et de Stieltjes“ 2 (Paris 1905); Brief vom 14. 2. 94, S. 369.

Es sei eine unendliche Folge analytischer Funktionen $f_n(z)$ vorgelegt, die im Innern eines Bereiches \mathfrak{B} dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen gemeinsamen Schranke bleiben. Außerdem konvergiere in einem Teilbereiche \mathfrak{B}^* von \mathfrak{B} die Folge der Funktionen $f_n(z)$ gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$. Dann ist $f(z)$ in jedem ganz im Innern von \mathfrak{B} gelegenen Bereich \mathfrak{B}' regulär, und die Funktionen $f_n(z)$ konvergieren in \mathfrak{B}' gleichmäßig gegen $f(z)$.

Es bezeichne $\Omega(Z, \delta)$ ein Gebiet, das durch die Ungleichheitsbeziehungen

$$2\delta \leq |z| \leq Z, \quad |z + \omega_r| \geq 2\delta \quad \text{für alle } r$$

definiert ist; d. h. $\Omega(Z, \delta)$ ist der Kreisbereich $|z| \leq Z$, der durch Entfernung der kleinen Kreise $|z| \leq 2\delta$, $|z + \omega_r| \leq 2\delta$ durchlöchert ist. Es sei ferner $\Omega'(Z, \delta)$ ein ganz im Innern von $\Omega(Z, \delta)$ gelegener Bereich, der aber die Kreise $|z + \omega_r| \leq 3\delta$, wenn $|\omega_r| \leq Z$ ist, bereits sämtlich in seinem Innern enthalten möge. Endlich sei bei passender Wahl von $N = N(Z, \delta)$ der Abstand $|\omega_r^{(n)} - \omega_r| \leq \delta$, wofern nur $n \geq N$ und $|\omega_r| \leq Z$ ist; eine solche Zahl N läßt sich nämlich nach Hilfsatz 2 immer bestimmen. Dann ist in dem Bereiche $\Omega(Z, \delta)$ für $n \geq N$

$$\left| \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} \right| = \left| \frac{M^{(n)}}{z} + \sum_r' \frac{M_r^{(n)}}{z + \omega_r^{(n)}} \right| \leq \frac{M^{(n)} + \sum_r' M_r^{(n)}}{\delta} = \frac{c_0}{\delta},$$

d. h. die rationalen Funktionen $\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)}$ bleiben im Bereiche $\Omega(Z, \delta)$ unter einer gemeinsamen festen Schranke $\frac{c_0}{\delta}$. Da dasselbe im Bereich $\Omega(Z, \delta)$ für die Funktionen $e^{-\zeta_n z} Q_{2n-1}(z)$ mithin wegen (135) auch für die Funktionen $e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z)$ gilt, so folgt auf Grund des Stieltjeschen Satzes, daß die Funktionen $e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z)$ in dem Bereiche $\Omega'(Z, \delta)$, der nach Definition ganz im Innern von $\Omega(Z, \delta)$ enthalten ist, gleichmäßig gegen die Funktion $r^*(z)$ konvergieren.

Da demnach auf dem Kreisrand $|z + \omega_r| = 3\delta$ (für $|\omega_r| \leq Z$), der ganz in $\Omega'(Z, \delta)$ enthalten ist, die Funktionen $e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z)$ gleichmäßig konvergieren, so muß nach einem bekannten Fundamentalsatz von Weierstraß auch im Innern der Kreise $|z + \omega_r| \leq 3\delta$ gleichmäßige Konvergenz vorhanden sein; mithin konvergieren die Funktionen $e^{-\zeta_n z} P_{2n-1}(z)$ gleichmäßig im ganzen Bereich $|z| \leq Z$.

Damit ist der Beweis aller Behauptungen des Satzes XIX vollständig erbracht.

Preisauflage der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1921.

Die Additionstheoreme für die drei elliptischen Funktionen sin am u , cos am u , Δ am u weisen auf eine Verallgemeinerung für ein System von vier oder mehr Funktionen hin. Man könnte für $v = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(1) \quad \varphi_v(u+v) = R_v(\varphi_1(u), \varphi_1(v), \varphi_2(u), \varphi_2(v), \dots, \varphi_n(u), \varphi_n(v))$$

setzen und dabei R_1, R_2, \dots, R_n als rationale Funktionen annehmen. Diese rationalen Funktionen hätten dann vermutlich nur den Bedingungen zu genügen, daß die beiden für $\varphi_v(u+v)$ und für $\varphi_v(v+u)$ unmittelbar und ebenso die beiden für $\varphi_v((u+v)+w)$ und für $\varphi_v(u+(v+w))$ mittelbar aus (1) sich ergebenden Ausdrücke übereinstimmend ausfallen.

Die Gleichungen (1) lassen sich unter analogen Bedingungen noch weiter so verallgemeinern, daß man die $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ als Funktionen von mehreren Argumenten voraussetzt; auch kann man nach Art der Weierstraßschen Behandlung der Additionstheoreme in die rechten Seiten der Gleichungen die Ableitungen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ mit ein-
gehen lassen.

Alle die angedeuteten Ansätze sind von dem Standpunkt aus zu verfolgen, daß die rationalen Funktionen R_1, R_2, \dots, R_n zuerst den Bedingungen gemäß gewählt und nachher die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ mit Hilfe der Additionstheoreme definiert werden. Es soll versucht werden, durch tatsächliche spezielle Wahl von n und von R_1, R_2, \dots, R_n einen elementaren Zugang zu einem speziellen Kapitel der Theorie der Abelschen Funktionen zu gewinnen.

Einlieferung bis zum 31. Oktober 1921; Preis 1500 Mark.

Die Einsendungen sind an den Archivar der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Universitätsbibliothek in Leipzig, zu richten.

(Angenommen 15. 4. 1920.)

